TD7 : Localisation

Diego Izquierdo

Les exercices 0, 1 et 3 sont à préparer avant la séance de TD. Pendant la séance, nous traiterons les exercices dans l'ordre suivant : 0, 1, 3, 4, 5, 9, 10.

Exercice 0 (à préparer) : TD6
Faire la question 4 de l'exercice 10 et l'exercice 8 du TD6.

Exercice 1 (à préparer) : Deux petites questions

1. Existe-t'il un morphisme d'anneaux injectif de $\mathbb{Z}[X]/(2X^2+3X+2)$ dans $\mathbb{C}$?

2. L'anneau $\mathbb{Z}[(X_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ est-il factoriel ?

Exercice 2 : Idéaux premiers d'un anneau de polynômes
Soit A un anneau principal de corps des fractions K. Nous allons caractériser les idéaux premiers et maximaux de $A[X]$.

1. Soit I un idéal premier non nul de $A[X]$.

(a) Montrer que $I \cap A$ est un idéal maximal de A.

(b) On suppose $I \cap A = 0$.

(i) Soit J l'idéal de $K[X]$ engendré par I. Montrer que $I = J \cap A[X]$.

(ii) Montrer que I est principal, engendré par un polynôme non constant, irréductible et primitif.

(c) On suppose que $I \cap A$ est non nul, et on pose $k = A/(I \cap A)$. Montrer que soit I est engendré par $I \cap A$, soit I est engendré par $I \cap A$ et par un polynôme $P \in A[X]$ dont l'image dans $k[X]$ est irréductible.

(d) Déduire de ce qui précède que les idéaux premiers de $A[X]$ sont : (0) ; les idéaux principaux engendrés par un polynôme non constant, irréductible et primitif ; les idéaux engendrés par un idéal maximal de A ; les idéaux engendrés par un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A et un polynôme de $A[X]$ dont la réduction modulo $\mathfrak{m}$ est irréductible. Lesquels sont maximaux ?

2. Quels sont les idéaux premiers (resp. maximaux) de $\mathbb{C}[X,Y]$?

3. Quels sont les idéaux premiers (resp. maximaux) de $\mathbb{Z}[X]$?

4. Soit α un entier algébrique, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{C}$ racine d'un polynôme unitaire irréductible à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que tout idéal premier non nul de $\mathbb{Z}[\alpha]$ est maximal.

Exercice 3 (à préparer) : Localisation et quotients
Soient A un anneau, I un idéal et S une partie multiplicative de A. Soit $\overline{S}$ l'image de S dans $\overline{A} = A/I$. Soit $S^{-1}I$ l'idéal de $S^{-1}A$ engendré par I. Montrer que $\overline{S}^{-1}\overline{A}$ est canoniquement isomorphe à $S^{-1}A/S^{-1}I$.

Exercice 4 : Exemples de localisés
Reconnaître $S^{-1}A$ dans las cas suivants (on pourra utiliser l'exercice précédent) :
(i) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
(ii) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \{-1, 1\}$;
(iii) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \{10^k | k \geq 0\}$;
(iv) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(0, y) | y \neq 0\} \cup \{(1, 1)\}$.
(v) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(x, y) | x \neq 0\}$;
(vi) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(x, y) | x \neq 0, y \neq 0\}$;
(vii) $A = \mathbb{C}[X]/(X^5)$, $S = \{X^k | k \geq 0\}$;
(viii) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^5Y)$, $S = \{X^k | k \geq 0\}$;
(ix) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^5Y)$, $S = \{P \in A | P \notin (X)\}$;
(x) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^5Y)$, $S = \{P \in A | P \notin (Y)\}$;
(xi) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(XY)$, $S = \{(X + Y)^k | k \geq 0\}$.

Exercice 5 : Quelques propriétés de la localisation
Soient A un anneau commutatif unitaire et S une partie multiplicative de A.

1. Montrer que l'ensemble des idéaux de $S^{-1}A$ s'injecte dans l'ensemble des idéaux de A. Montrer que l'injection induit une bijection entre les idéaux premiers de $S^{-1}A$ et les idéaux premiers de A n'intersectant pas S.

2. Si A est noethérien, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est noethérien.

3. Si A est principal et que S ne contient pas 0, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est principal.

4. Si A est factoriel et que S ne contient pas 0, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est factoriel.

Exercice 6 : Un contre-exemple

1. Soient A un anneau principal et K son corps des fractions. Soit B un sous-anneau de K contenant A. Montrer qu'il existe une partie multiplicative S de A telle que $B = S^{-1}A$.

2. Trouver un sous-anneau de $\mathbb{C}(X, Y)$ contenant $\mathbb{C}[X, Y]$ qui ne soit pas en tant que $\mathbb{C}[X, Y]$-algèbre un localisé de $\mathbb{C}[X, Y]$.

Exercice 7 : Germes de fonctions

Soit $\mathcal{C}$ l'anneau des fonctions continues de $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal des fonctions nulles en 1. Soit $S = \mathcal{C} \setminus \mathfrak{m}$. Montrer que $S^{-1}\mathcal{C}$ s'identifie à l'anneau local des germes de fonctions continues en 1.

Exercice 8 : Localisation et limite inductive
Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A. Montrer que :

$$S^{-1}A = \varinjlim_{f \in S} A[1/f].$$

Exercice 9 : Propriétés locales et globales
Soit A un anneau.

1. Montrer que A est réduit si, et seulement si, $A_{\mathfrak{m}}$ est réduit pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$. On dit que la propriété d'être réduit locale.

2. On suppose A intègre. On note K son corps des fractions.
  (a) Montrer que $A = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\ A} A_{\mathfrak{m}}$.
  (b) On dit que A est normal si tout élément de K qui est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans A est en fait dans A. Montrer que A est normal si, et seulement si, $A_{\mathfrak{m}}$ est normal pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

3. Est-il vrai que A est intègre si, et seulement si, $A_{\mathfrak{m}}$ est intègre pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$? On dit que la propriété d'être intègre est globale.

Exercice 10 : L'anneau total des fractions
Soient $A = \mathbb{C}[X, Y]/(XY)$ et $B = \mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^2(Y + Z^2), XY)$. Calculer $Q(A)$ et $Q(B)$.

Exercice 11 (difficile) : Anneaux artiniens
Soit A un anneau. On suppose que A est *artinien*, c'est-à-dire que toute suite décroissante d'idéaux stationne.

1. Donner des exemples d'anneaux artiniens. Un anneau noethérien est-il forcément artinien ?

2. Montrer que tout idéal premier de A est maximal. On dit que A est de dimension 0.

3. Montrer que A a un nombre fini d'idéaux premiers.

4. Montrer que A est produit fini d'anneaux locaux artiniens.

5. Dans cette question, on suppose que A est un anneau local artinien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.
  (a) Montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $\mathfrak{m}^n = 0$.
  (b) En déduire que A est noethérien.

6. En général, montrer que A est noethérien.

7. Réciproquement, montrer qu'un anneau noethérien de dimension 0 est artinien.

Dans les exercices qui suivent, si S est une partie multiplicative d'un anneau A et M un A-module, il est possible de construire un $S^{-1}A$-module $S^{-1}M$ de manière analogue à la construction de $S^{-1}A$.

Exercice 12 : Une suite exacte
Soient A un anneau et $a, b \in A$ tels que $(a, b) = A$. Soit M un A-module. Montrer qu'il existe une suite exacte :

$$0 \to M \to M\left[\frac{1}{a}\right] \oplus M\left[\frac{1}{b}\right] \to M\left[\frac{1}{ab}\right].$$

Généraliser à une famille quelconque $(a_i)_{i\in I}$ de A.

Exercice 13 : Propriétés locales et globales, le retour
Soient A un anneau et M, N et P des A-modules.

1. Soit S une partie multiplicative de A. On se donne deux morphismes de A-modules $f : M \to N$ et $g : N \to P$ tels que $M \to N \to P$ est une suite exacte de A-modules. Montrer qu'elle induit une suite exacte de $S^{-1}A$-modules :
$$S^{-1}M \to S^{-1}N \to S^{-1}P.$$

2. Montrer que le morphisme naturel $M \to \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}\, A} M_{\mathfrak{m}}$ est injectif. En déduire que $M = 0$ si, et seulement si, $M_{\mathfrak{m}} = 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

3. On se donne deux morphismes de A-modules $f : M \to N$ et $g : N \to P$. Montrer que la suite $0 \to M \to N \to P \to 0$ est exacte si, et seulement si, la suite $0 \to M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}} \to P_{\mathfrak{m}} \to 0$ est exacte pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

4. Est-il vrai que M est libre si, et seulement si, $M_{\mathfrak{m}}$ est libre pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$?

Remarque : Géométriquement, il faut voir M comme une famille "continue" $(M_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\, A}$ de $A_{\mathfrak{p}}$-modules.