Td n° 7 d'Analyse fonctionnelle

Théorie spectrale – Distributions

Séance du 27 Mars 2015

Exercice 1. *Spectre de la multiplication*

Soit $F \in L^\infty(X)$ définie sur l'espace mesuré fini $(X, d\mu)$. On considère l'opérateur de multiplication sur $L^2(X, d\mu)$ $T_F : \phi \mapsto F\phi$. Montrer que le spectre de T_F correspond à l'image essentielle de F, c'est à dire

$$\{\lambda, \forall \varepsilon,\ \mu(\{\lambda - \varepsilon < F < \lambda + \varepsilon\}) > 0\}.$$

⋆

Exercice 2. *Polynômes de Hermite*

Soit l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$.

1. Montrer que les polynômes forment un sous-espace vectoriel dense de H.

Indication : On pourra montrer que si $f \in H$ est orthogonal à l'espace engendré par les polynômes, la fonction holomorphe

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{zt-t^2}dt$$

est identiquement nulle et vérifie $F(ix) = \mathcal{F}(f)$.

On considère les polynômes de Hermite $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ et les fonctions de Hermite $\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$.

2. Montrer que H_n est un polynôme de degré n et qu'il est orthogonal (pour le produit hermition de H) à l'espace engendré par les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

3. Montrer que $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ et que $\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

4. Montrer que $\left(\frac{d}{dx} + x\right)\psi_n = 2n\psi_{n-1}$ et que $\left(-\frac{d}{dx} + x\right)\psi_n = \psi_{n+1}$.

5. Montrer enfin que $\left(\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\psi_n = (2n+1)\psi_n$.

6. Montrer que ψ_n est une fonction propre pour la transformée de Fourier.

Indication : On pourra calculer l'équation différentielle satisfaite par $\mathcal{F}(\psi_n)$.

⋆

Exercice 3. *Partition de l'unité et fonction plateau*

1. Construire une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^∞, telle que $g(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $g(x) = 0$ si $|x| \geq 2$, et $g(x) \in [0, 1]$ pour tout x.

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et V_i une famille d'ouverts telle que $\bigcup_i V_i = \Omega$. Montrer qu'il existe une suite de fonctions $\varphi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ C^∞ positives telle que pour tout n, φ_n est à support dans l'un des V_i, que pour tout $x \in \Omega$,

$$\sum_i \varphi_i(x) = 1,$$

(la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls) et que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=1}^{m} \varphi_n|_K = 1$.

3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact de U. Montrer qu'il existe une fonction $\psi : U \to \mathbb{R}$ C^∞ à support compact dans U, à valeur dans $[0,1]$ et telle que pour tout x dans un voisinage de K, $\psi(x) = 1$.

⋆

Exercice 4. *Support d'une distribution*

Soit Ω un ouvert. On dit qu'une distribution u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est nulle sur Ω si pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u(\phi) = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des ouverts sur lesquels u est nulle est stable par réunion. On appelle support de u (et on note $\mathrm{Supp}(u)$) le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel u est nul.

2. Montrer que cette notion de support coïncide avec la notion usuelle pour des fonctions régulières. Quel est le support de δ_0 ?

3. Montrer qu'une distribution à support compact est d'ordre fini.

⋆

Exercice 5. *Quelques exemples de distributions*

1. Montrer que $u : \phi \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \phi^{(i)}(i)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini.

2. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ définie par $u(\phi) = \displaystyle\int \phi(x,x)dx$. Montrer que u est bien une distribution, et calculer $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

3. Montrer que $e^{\frac{1}{x^2}}$ appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_*^+)$, mais ne se prolonge pas à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4. Montrer qu'une distribution positive $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (i.e. pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ positive, $u(\phi) \geq 0$) est une mesure.

5. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $v' = u$, et que l'ensemble de telles distributions forme un espace affine.

⋆

Exercice 6. *Distribution dont le support est un point*

Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{Supp}(u) = \{0\}$. En particulier, u est d'ordre fini m.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ positive, telle que $\psi = \mathbb{1}$ sur un voisinage de $\overline{B(0,1/2)}$ et $\mathrm{Supp}\,\psi \in B(0,1)$. On pose $\psi_r(x) = \psi(x/r)$.

1. Rappeler pourquoi $\psi_r u = u$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telle que pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq m$, $(D^\alpha \phi)(0) = 0$.

2. Montrer que $\|\psi_r \phi\|_m \to 0$ quand $r \to 0$.

3. En déduire que $(u, \phi) = 0$.

4. Montrer qu'il existe a_k tels que $u = \sum_{k=0}^{m} a_k \delta_0^{(k)}$.

⋆