Analyse Complexe TD 7 (27/03 - 30/03)

Exercice 1 On peut commencer par constater que dans le cas où $f(0) = 0$ et $z = 0$, c'est une partie du lemme de Schwarz. On cherche donc à se ramener à ce cas, en utilisant des automorphismes du disque. On se donne donc f qui vérifie les hypothèses. On se donne aussi z dans le disque.

On considère ϕ et φ deux automorphismes du disque tels que $\phi(0) = z$ et $\varphi(f(z)) = 0$. Alors $g = \varphi \circ f \circ \phi$ est une fonction du disque dans lui-même, qui s'annule en zéro. On trouve que

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{|\varphi'(f(z))||\phi'(z)|}. \tag{1}$$

L'exercice se termine quand on a calculé les quantités du membre de droite. On peut choisir par exemple

$$\phi(s) = \frac{z-s}{1-s\overline{z}} \text{ et } \varphi(s) = \frac{s-f(z)}{1-s\overline{f(z)}}. \tag{2}$$

Alors le membre de droite vaut

$$\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}. \tag{3}$$

Exercice 2 Une fonction holomorphe sur un ouvert admet une primitive sur cet ouvert si toutes ses périodes sont nulles.

Dans le cas d'une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, il suffit donc que tous les résidus soient nuls. On peut le vérifier avec la formule des résidus généralisée.

Exercice 3 Soit ϕ une transformation de Möbius.

1. Il s'agit d'examiner le nombre de points fixes d'une homographie. On se donne donc $\phi(z) = e^{i\theta}(z - z_0)/(1 - \overline{z_0}z)$. L'équation aux points fixe donne

$$z^2 + \frac{e^{i\theta}-1}{\overline{z_0}}z - \frac{z_0}{\overline{z_0}}e^{i\theta} = 0. \tag{4}$$

   Si $z_0 = 0$, et ϕ n'est pas l'identité, cette équation devient $z = 0$. Sinon, il y a deux solutions sur $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité). Le produit des deux solution est $e^{i\theta}z_0/\overline{z_0}$, donc de module 1. Ceci implique que soit une solution est dans $\mathbb{D}$, et l'autre en dehors de $\overline{D}$, soit les deux solutions sont sur $\mathbb{S}$.
   Commençons par le premier cas. Alors, on peut conjuguer ϕ pour supposer que le points fixe dans le disque est 0. On en déduit que ϕ est conjugué à une rotation.
   Ensuite, si les points fixes sont sur $\mathbb{S}$, on peut conjuguer ϕ en un automorphisme de $\mathbb{H}$, de sorte que un des points fixes est le point à l'infini. Autrement dit ϕ est conjugué à $(az + b)/(cz + d)$. La condition que ∞ est point fixe donne $c = 0$. De plus, $ad - bc = 1$, donc ϕ est conjugué à $a(az + b)$.
   Si $a = 1$, le seul point fixe est l'infini, et c'est bien une translation.
   Si $a \neq 1$, on peut conjuguer par la translation $z \mapsto z + ab/(1 - a^2)$. On obtient une homothétie de raison a^2.
2. Le seul cas où il n'existe pas une telle fonction est celui de la rotation d'angle irationnel.
   Quand la rotation est d'angle rationnel $2\pi p/q$, n'importe quelle fonction bornée de z^q fait l'affaire.
   Dans le cas de la translation, dans le demi-plan de Poincaré, il faut prendre des fonctions de $e^{2i\pi z/b}$. La variable $e^{2i\pi z/b}$ vit dans le disque unité, sur lequel il existe des fonctions holomorphes bornées non-constantes.
   Enfin, dans le cas de l'homothétie, il faut prendre des fonctions de $\log_\pi(z)$. Cette variable vit dans une bande $\{\mathrm{Im} \in]0, \pi[\}$, sur laquelle il existe des fonctions bornées non-constantes (c'est biholomorphe à un disque. . .).

Exercice 4 La réponse est le produit libre $\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$, avec n copie de $\mathbb{Z}$. Avec les éléments du cours, ce n'est pas vraiment possible de faire la preuve proprement. Avec des outils élémentaires de topologie algébrique, on y arrive rapidement. Vous pouvez voir le poly du cours (par exemple) de la fimfa.

Exercice 5 (Théorème de Müntz-Szasz) On se donne $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, on considère X, la fermeture dans $C := C^0([0, 1], \mathbb{C})$ de l'espace vectoriel engendré par les $(t^{\lambda_i})_i$. Si μ est une mesure complexe finie sur $[0, 1]$, on pose $f_\mu(z) := \int t^z \mathrm{d}\mu$.

1. On se donne μ une mesure borélienne qui s'annule sur tous les éléments de X. Si on arrive à montrer que μ est la mesure nulle, cela impliquerait que l'adhérence de X est C tout entier. On a $f_\mu(\lambda_i) = 0$ pour $i = 1 \dots$. Par ailleurs, la fonction f_μ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re} z > 0\}$, continue et bornée sur $\{\mathrm{Re} z \geq 0\}$. Si on la compose par $z \mapsto (z+1)/(z-1)$, on obtient une fonction bornée sur le disque, continue sur le bord, qui s'annule aux $(1-\lambda_i)/(1+\lambda_i)$.
   D'après l'exercice sur les produits de Blaschke, cette fonction est identiquement zéro si la somme $\sum |(1-\lambda_i)/(1+\lambda_i)| - 1$ ne converge pas. En particulier, c'est le cas si $\sum 1/\lambda_i = +\infty$.
   Dans ce cas, f_μ est identiquement nulle. En particulier, μ s'annule sur tous les polynômes, et par le théorème de Weierstrass, μ est nulle.
2. Réciproquement, si $\sum 1/\lambda_i < \infty$, on pose
$$f(z) = \frac{z}{(2+z)^3} \prod_i \frac{\lambda_i - z}{2 + \lambda_i + z}.$$
   Ce produit converge bien pour $\mathrm{Re} z > -2$ car
$$\frac{\lambda_i - z}{2 + \lambda_i - z} - 1 = -\frac{2z+2}{2+\lambda_i + z} \tag{5}$$
   et la somme $\sum 1/\lambda_i$ converge par hypothèse.
   Cette fonction est holomorphe sur $\mathrm{Re} z > -2$. Le produit infini est uniformément borné sur le demi plan $\mathrm{Re} z > -1$ (c'est un produit de Blaschke). Par contre, le préfacteur tend vers 0 quand $z \to \infty$. En particulier la formule
$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(-1+\imath s)}{-1+\imath s - z} \mathrm{d}s \text{ tant que } \mathrm{Re} z > -1.$$
   pour $\mathrm{Re} z > -1$, est obtenue comme une limite de formules de Cauchy pour des grand rectangles.
   On supposant que $f = f_\mu$, on trouve que
$$f(-1+is) = \int_0^1 t^{-1+is} d\mu(t). \tag{6}$$
   La fonction $s \mapsto f(-1+is)$ est dans L^1. Sa transformée de Fourier est donc dans L^∞.
   En écrivant $d\mu = W(|\log t|)dt$, on trouve que
$$f(-1+is) = \int_0^\infty W(u) e^{-isu} du. \tag{7}$$
   Ainsi,
$$W(u) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ius} f(-1+is) ds. \tag{8}$$
   Ceci est une fonction L^∞ non identiquement nulle car f n'est pas identiquement nulle, et on a donc construit une mesure μ telle que $f = f_\mu$.
   En particulier, comme cette mesure est non-nulle, qu'elle est continue sur C, et que X est dans son noyau, l'adhérence de X n'est *pas* C.

Exercice 6

1. Il suffit de voir qu'elle est réflexive, symmétrique, et transitive.
2. L'invariance par homotopie est dans le cours. D'après le cours, on sait aussi que l'indice de la composition de deux chemins est la somme des indices des deux chemins.
3. ** D'après Van Kampen du cours, le π_1 de U est généré par les lacets élémentaires autour des points $a_{1,\dots,n}$. En particulier, ceci donne une famille de générateur de $H_1(U)$. On peut observer que c'est une famille libre. En conséquence de quoi, $H_1(U) \simeq \mathbb{Z}^n$.
4. ** Par définition de la loi sur $H_1(U)$, c'est une loi commutative.
   Pour montrer que $H_1(U)$ est l'abélianisé de $\pi_1(U)$, il s'agit de montrer que si γ est homologue au lacet trivial, alors γ est un produit de commutateurs.
   Donnons-nous un tel lacet γ. On se donne $\epsilon > 0$ tel que $d(\gamma, \partial U) > \epsilon$ et $|\gamma| < 1/\epsilon$. On considère l'ouvert $V = \{z,\ |z| < 1/\epsilon,\ d(z, \partial U) > \epsilon\}$. Le complémentaire de V a un nombre fini de composante connexes $V_1, \dots, V_n$, quitte à bien choisir ϵ (par le lemme de Sard). Le bord de ces composantes connexes est alors lisse (encore Sard). On peut rajouter à V celles qui ne rencontrent pas le complémentaire de U. On obtient un ouvert de $\mathbb{C}$ qui est homéomorphe à $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points. Étant donné que l'on sait déjà que le $H_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ est l'abélianisé de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$, ceci implique γ est homotope dans V à un produit de commutateurs. Or $V \subset U$.