Td n° 7 d'EDP

Propagation des singularités 2

Séance du 21 novembre 2014

Exercice 1. *Description du front d'onde*

1. Soient $P = Op(p)$ et $Q = Op(q)$ deux opérateurs pseudo différentiels, avec $p \in S^m$ et $q \in S^r$, de supports en x disjoints. Montrer que $Op(p)Op(q) \in S^{-\infty}$.

2. Soit u une distribution sur $\mathbb{R}^n$ et $(w_0, \xi_0) \notin WF(u)$. Montrer que l'on peut écrire $u = v + w$, avec $u = v$ au voisinage de x_0 et pour tout ξ dans un voisinage conique Γ de ξ_0,

$$|\hat{v}(\xi)| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N}.$$

3. Soit $A = Op(\zeta(x)\chi(\xi))$, avec χ homogène de degré 0 pour $|\xi| > 1$ et χ supportée sur Γ, $\chi(\xi_0) = 1$, et $\zeta = 1$ au voisinage de x_0, $\zeta = 0$ sur le support de w. Montrer que Aw et Av sont C^∞.

4. Réciproquement, on suppose qu'il existe un opérateur pseudo-différentiel A, de symbole principal $a_0 \in S^0$, tel que $a_0(x_0, \xi_0) = 1$ et $Au \in C^\infty$. Montrer qu'il existe un opérateur pseudo-différentiel Q tel que le symbole de QA soit identiquement 1 sur un voisinage de la forme $B(x_0, \varepsilon) \times \Gamma$, avec Γ un voisinage conique de ξ_0.

5. Soit $\chi(\xi), \zeta(x)$ telles que χ supportée sur Γ, $\chi(\xi_0) = 1$, et ζ supportée sur $B(x_0, \varepsilon)$, $\zeta(x_0) = 1$. En écrivant

$$\chi(D)(\zeta u) = \chi(D)\zeta QAu + [QA, \chi(D)\zeta]u + (I - QA)\chi(D)(\zeta u),$$

montrer que $\chi(D)(\zeta u) \in C^\infty$.

6. En déduire que $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$.

Indication : On pourra utiliser un résultat du cours, qui dit que si $p \in S^{-\infty}$, alors $Op(p)$ est continu de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{S}$.

⋆

Exercice 2. *Propagation des singularités*

On considère un symbole $a(x, \xi) = a^1 + a^0$, avec $a^1 \in S^1$ à valeurs imaginaires pures et homogène en ξ. On note H le champ de vecteur

$$H = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial a^1}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial a^1}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right).$$

On note $S(t, s)$ l'opérateur qui à $u_0 \in L^2$ associe la solution $u(t) = S(t, s)u_0$ de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Op(a)u = 0, \quad u(s) = u_0.$$

Soit $P_0 = Op(p_0) \in Op(S^0)$. On rappelle le théorème suivant, prouvé dans le TD précédent

Théorème 1. *Il existe $Q = Op(q_t)$ un opérateur pseudo différentiel tel que pour tout $u_0 \in L^2$,*

$$S(t,0)P_0S(0,t) - Op(q_t)u_0 \in H^\infty.$$

De plus, si on définit Φ comme le flot associé à H, on a

$$q_t(x,\xi) - p_0(\Phi_H^{-t}(x,\xi)) \in S^{-1}.$$

On considère la solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Op(a)u = 0, \quad u(0,x) = u_0.$$

1. Soit $(x_0,\xi_0) \notin WF(u_0)$. Montrer qu'il existe $P_0 \in Op(S^0)$ de symbole principal p_0 tel que $p_0(x_0,\xi_0) = 1$ et p_0 homogène en ξ pour ξ assez grand tel que $Op(p_0)u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. En introduisant l'opérateur $Op(q_t)$, montrer que

$$(\partial_t + Op(a))Op(q_t)u \in C^0([0,T], H^\infty), \quad Op(q_t)u|_{t=0} \in C_0^\infty.$$

En déduire que $Op(q_t)u(t) \in C^\infty$.

3. En déduire que $\Phi^t(x_0,\xi_O) \notin WF(u(t))$. Comparer avec le résultat du TD2 sur la propagation des singularités pour l'équation des ondes.

$\star$