TD7 : Localisation

Diego Izquierdo

Les exercices 0, 1 et 3 sont à préparer avant la séance de TD. Pendant la séance, nous traiterons les exercices dans l'ordre suivant : 0, 1, 3, 4, 5, 9, 10.

Exercice 0 (à préparer) : TD6

Faire la question 4 de l'exercice 10 et l'exercice 8 du TD6.

Exercice 1 (à préparer) : Deux petites questions

1. Existe-t'il un morphisme d'anneaux injectif de $\mathbb{Z}[X]/(2X^2+3X+2)$ dans $\mathbb{C}$?

2. L'anneau $\mathbb{Z}[(X_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ est-il factoriel ?

Exercice 2 : Idéaux premiers d'un anneau de polynômes

Soit A un anneau principal de corps des fractions K. Nous allons caractériser les idéaux premiers et maximaux de $A[X]$.

1. Soit I un idéal premier non nul de $A[X]$.

(a) Montrer que $I \cap A$ est un idéal maximal de A.

> **Indications :** Le morphisme $A/(A\cap I) \to A[X]/I$ est injectif. Comme I est premier, on en déduit que $A/(A\cap I)$ est intègre, autrement dit que $A \cap I$ est un idéal premier de A. L'anneau A étant principal, c'est même un idéal maximal.

(b) On suppose $I \cap A = 0$.

(i) Soit J l'idéal de $K[X]$ engendré par I. Montrer que $I = J \cap A[X]$.

> **Indications :** L'inclusion $I \subseteq J \cap A[X]$ est évidente. Soit $P \in J \cap A[X]$ non nul. Il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $aP \in I$. Or $a \notin I$ car $I \cap A = 0$. Donc, comme I est premier, on déduit que $P \in I$.

(ii) Montrer que I est principal, engendré par un polynôme non constant, irréductible et primitif.

> **Indications :** L'anneau $K[X]$ est principal, donc il existe $P \in K[X]$ tel que $J = (P)$. Soit c le contenu de P. On a alors $I = A[X] \cap (c^{-1}P)K[X] = (c^{-1}P)A[X]$ car $c^{-1}P$ est primitif. On en déduit que I est principal, engendré par le polynôme $c^{-1}P$. De plus, comme I est premier, $c^{-1}P$ est irréductible et comme $I \cap A = 0$, $c^{-1}P$ est non constant.

(c) On suppose que $I \cap A$ est non nul, et on pose $k = A/(I \cap A)$. Montrer que soit I est engendré par $I \cap A$, soit I est engendré par $I \cap A$ et par un polynôme $P \in A[X]$ dont l'image dans $k[X]$ est irréductible.

> **Indications :** L'anneau A étant principal, il existe $a \in A$ non nul tel que $A \cap I = (a)$. On remarque que l'idéal I contient $aA[X]$. Comme $A[X]/aA[X] = k[X]$ est principal, il existe $P \in k[X]$ irréductible ou nul tel que $I/J = Pk[X]$. On en déduit que $I = aA[X]$ si $P = 0$ et que $I = (a, \tilde{P})$ où $\tilde{P} \in A[X]$ est un relèvement de P si $P \neq 0$.

(d) Déduire de ce qui précède que les idéaux premiers de $A[X]$ sont : (0) ; les idéaux principaux engendrés par un polynôme non constant, irréductible et primitif ; les idéaux engendrés par un idéal maximal de A ; les idéaux engendrés par un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A et un polynôme de $A[X]$ dont la réduction modulo $\mathfrak{m}$ est irréductible. Lesquels sont maximaux ?

> **Indications :** La liste des idéaux premiers est immédiate à partir des questions précédentes. Les idéaux engendrés par un idéal maximal de A et (0) ne sont jamais maximaux, alors que les idéaux engendrés par un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A et un polynôme de $A[X]$ dont la réduction modulo $\mathfrak{m}$ est irréductible sont toujours maximaux. Les idéaux principaux engendrés par un polynôme non constant, irréductible et primitif peuvent être maximaux ou non.

2. Quels sont les idéaux premiers (resp. maximaux) de $\mathbb{C}[X, Y]$?

> **Indications :** Les idéaux premiers sont (0), les idéaux principaux engendrés par des éléments irréductibles, et les idéaux $(X - a, Y - b)$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. Ces derniers sont les idéaux maximaux.

3. Quels sont les idéaux premiers (resp. maximaux) de $\mathbb{Z}[X]$?

> **Indications :** Les idéaux premiers sont (0), les idéaux principaux engendrés par des éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$, et les idéaux (p, P) où $p \in \mathbb{Z}$ est un nombre premier et $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme dont la réduction modulo p est irréductible. Ces derniers sont les idéaux maximaux.

4. Soit α un entier algébrique, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{C}$ racine d'un polynôme unitaire irréductible à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que tout idéal premier non nul de $\mathbb{Z}[\alpha]$ est maximal.

> **Indications :** Soit P un polynôme unitaire irréductible à coefficients dans $\mathbb{Z}$ annulant α. On a alors un isomorphisme $\mathbb{Z}[\alpha] \cong \mathbb{Z}[X]/(P)$. Donc les idéaux premiers non nuls de $\mathbb{Z}[\alpha]$ correspondent aux idéaux premiers de $\mathbb{Z}[X]$ contenant strictement (P). Ce sont donc les (p, P) pour p un nombre premier tel que la réduction de P modulo p est irréductible : ils sont bien maximaux.

Exercice 3 (à préparer) : Localisation et quotients

Soient A un anneau, I un idéal et S une partie multiplicative de A. Soit $\overline{S}$ l'image de S dans $\overline{A} = A/I$. Soit $S^{-1}I$ l'idéal de $S^{-1}A$ engendré par I. Montrer que $\overline{S}^{-1}\overline{A}$ est canoniquement isomorphe à $S^{-1}A/S^{-1}I$.

Exercice 4 : Exemples de localisés

Reconnaître $S^{-1}A$ dans las cas suivants (on pourra utiliser l'exercice précédent) :

(i) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

(ii) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \{-1, 1\}$;
(iii) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \{10^k | k \geq 0\}$;
(iv) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(0, y) | y \neq 0\} \cup \{(1, 1)\}$.
(v) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(x, y) | x \neq 0\}$;
(vi) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(x, y) | x \neq 0, y \neq 0\}$;
(vii) $A = \mathbb{C}[X]/(X^5)$, $S = \{X^k | k \geq 0\}$;
(viii) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^5Y)$, $S = \{X^k | k \geq 0\}$;
(ix) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^5Y)$, $S = \{P \in A | P \notin (X)\}$;
(x) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^5Y)$, $S = \{P \in A | P \notin (Y)\}$;
(xi) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(XY)$, $S = \{(X + Y)^k | k \geq 0\}$.

Exercice 5 : Quelques propriétés de la localisation

Soient A un anneau commutatif unitaire et S une partie multiplicative de A.

1. Montrer que l'ensemble des idéaux de $S^{-1}A$ s'injecte dans l'ensemble des idéaux de A. Montrer que l'injection induit une bijection entre les idéaux premiers de $S^{-1}A$ et les idéaux premiers de A n'intersectant pas S.

2. Si A est noethérien, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est noethérien.

3. Si A est principal et que S ne contient pas 0, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est principal.

4. Si A est factoriel et que S ne contient pas 0, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est factoriel.

Exercice 6 : Un contre-exemple

1. Soient A un anneau principal et K son corps des fractions. Soit B un sous-anneau de K contenant A. Montrer qu'il existe une partie multiplicative S de A telle que $B = S^{-1}A$.

> **Indications :** Soit $S = A \cap B^\times$. Montrons que $B = S^{-1}A$. Pour ce faire, considérons $x \in B \setminus \{0\}$. Comme A est principal, on peut écrire $x = y/z$, avec $y, z \in A \setminus \{0\}$ tels que $(y, z) = A$. Soient $u, v \in A$ tels que $yu + zv = 1$. On a alors $1/z = xu + v \in B$. Cela prouve que $z \in S$ et que $x \in S^{-1}A$. Donc $B \subseteq S^{-1}A$. L'inclusion $S^{-1}A \subseteq B$ est immédiate.

2. Trouver un sous-anneau de $\mathbb{C}(X, Y)$ contenant $\mathbb{C}[X, Y]$ qui ne soit pas en tant que $\mathbb{C}[X, Y]$-algèbre un localisé de $\mathbb{C}[X, Y]$.

> **Indications :** Soit $A = \mathbb{C}[X, Y, X/Y]$: c'est un sous-anneau de $\mathbb{C}(X, Y)$ contenant $\mathbb{C}[X, Y]$. Supposons qu'il existe une partie multiplicative $S \subseteq \mathbb{C}[X, Y] \setminus \{0\}$ telle que $A = S^{-1}\mathbb{C}[X, Y]$. Alors $S \subseteq A^\times$. Mais
>
> $$\varphi : \mathbb{C}[U, V] \to A, U \mapsto Y, V \mapsto X/Y$$
>
> est un isomorphisme d'anneaux. Donc $A^\times = \mathbb{C}^\times$, et $S^{-1}\mathbb{C}[X, Y] = \mathbb{C}[X, Y]$: absurde ! On en déduit que A n'est pas un localisé de $\mathbb{C}[X, Y]$.

Exercice 7 : Germes de fonctions
Soit $\mathcal{C}$ l'anneau des fonctions continues de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal des fonctions nulles en 1. Soit $S = \mathcal{C} \setminus \mathfrak{m}$. Montrer que $S^{-1}\mathcal{C}$ s'identifie à l'anneau local des germes de fonctions continues en 1.

> **Indications :** Soit $\mathcal{C}_1$ l'anneau des germes de fonctions continues en 1. Considérons le morphisme naturel $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_1$. Comme les éléments de S sont envoyés sur $\mathcal{C}_1^\times$, le morphisme ϕ induit un morphisme $\psi : S^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{C}_1$. Montrons que c'est un isomorphisme.
>
> Soit $f \in \mathrm{Ker}\ \psi$. On peut écrire $f = g/h$ avec $g \in \mathcal{C}$ et $h \in S$. Alors $\psi(f) = \phi(g)/\phi(h) = 0$. Cela montre que $\phi(g) = 0$, et donc qu'il existe un ouvert U de $[0,2]$ contenant 1 tel que $g|_U = 0$. Soit $s \in \mathcal{C}$ une fonction continue telle que $s(1) = 1$ et $s|_{[0,2]\setminus U} = 0$. Alors $s \in S$ et $sg = 0$. Donc $g/1$ est nul dans $S^{-1}\mathcal{C}$ et $f = 0$. Cela prouve l'injectivité de ϕ.
>
> Soient U un intervalle ouvert de $[0,2]$ contenant et f une fonction continue sur U. Alors il existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}$ prolongeant f. Cela impose que $\psi(\tilde{f}/1)$ est la classe de (U, f) dans $\mathcal{C}_1$. Le morphisme ψ est donc surjectif.

Exercice 8 : Localisation et limite inductive
Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A. Montrer que :

$$S^{-1}A = \varinjlim_{f \in S} A[1/f].$$

> **Indications :** Considérons le morphisme naturel $A \to S^{-1}A$. Il induit pour chaque $f \in S$ un morphisme $A[1/f] \to S^{-1}A$. Ces morphismes étant compatibles entre eux, la propriété universelle de la limite inductive fournit un morphisme naturel :
>
> $$\phi : \varinjlim_{f \in S} A[1/f] \to S^{-1}A.$$
>
> Réciproquement, par propriété universelle de la localisation, le morphisme naturel $A \to \varinjlim_{f\in S} A[1/f]$ induit un morphisme :
>
> $$\psi : S^{-1}A \to \varinjlim_{f \in S} A[1/f].$$
>
> On vérifie aisément que ϕ et ψ sont inverses l'un de l'autre.

Exercice 9 : Propriétés locales et globales
Soit A un anneau.

1. Montrer que A est réduit si, et seulement si, $A_\mathfrak{m}$ est réduit pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$. On dit que la propriété d'être réduit locale.
2. On suppose A intègre. On note K son corps des fractions.
   (a) Montrer que $A = \cap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\ A} A_\mathfrak{m}$.
   (b) On dit que A est normal si tout élément de K qui est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans A est en fait dans A. Montrer

que A est normal si, et seulement si, $A_{\mathfrak{m}}$ est normal pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

3. Est-il vrai que A est intègre si, et seulement si, $A_{\mathfrak{m}}$ est intègre pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$? On dit que la propriété d'être intègre est globale.

Exercice 10 : L'anneau total des fractions
Soient $A = \mathbb{C}[X,Y]/(XY)$ et $B = \mathbb{C}[X,Y,Z]/(X^2(Y+Z^2), XY)$. Calculer $Q(A)$ et $Q(B)$.

Exercice 11 (difficile) : Anneaux artiniens
Soit A un anneau. On suppose que A est *artinien*, c'est-à-dire que toute suite décroissante d'idéaux stationne.

1. Donner des exemples d'anneaux artiniens. Un anneau noethérien est-il forcément artinien ?

2. Montrer que tout idéal premier de A est maximal. On dit que A est de dimension 0.

3. Montrer que A a un nombre fini d'idéaux premiers.

4. Montrer que A est produit fini d'anneaux locaux artiniens.

5. Dans cette question, on suppose que A est un anneau local artinien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.
   (a) Montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $\mathfrak{m}^n = 0$.
   (b) En déduire que A est noethérien.

6. En général, montrer que A est noethérien.

7. Réciproquement, montrer qu'un anneau noethérien de dimension 0 est artinien.

Dans les exercices qui suivent, si S est une partie multiplicative d'un anneau A et M un A-module, il est possible de construire un $S^{-1}A$-module $S^{-1}M$ de manière analogue à la construction de $S^{-1}A$.

Exercice 12 : Une suite exacte
Soient A un anneau et $a, b \in A$ tels que $(a,b) = A$. Soit M un A-module. Montrer qu'il existe une suite exacte :

$$0 \to M \to M\left[\frac{1}{a}\right] \oplus M\left[\frac{1}{b}\right] \to M\left[\frac{1}{ab}\right].$$

Généraliser à une famille quelconque $(a_i)_{i\in I}$ de A.

Indications : Considérons les morphismes :

$$f : M \to M\left[\frac{1}{a}\right] \oplus M\left[\frac{1}{b}\right], x \mapsto (x, x),$$

$$g : M\left[\frac{1}{a}\right] \oplus M\left[\frac{1}{b}\right] \to M\left[\frac{1}{ab}\right], (x, y) \mapsto x - y.$$

Bien sûr, on a $g \circ f = 0$. Il faut donc montrer que f est injectif et que $\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n x = b^n x = 0$. Comme $(a, b) = A$, on a aussi $(a^k, b^k) = 0$ pour tout $k \geq 0$. On en déduit que $x = 0$ et que f est injectif.

Soit $(y, z) \in \mathrm{Ker}(g)$. On écrit $y = y'/a^k$ et $z = z'/b^k$ avec $y', z' \in M$. Comme $y = z$ dans $M[1/(ab)]$, il existe $n \geq 0$ tel que $(ab)^n(b^k y' - a^k z') = 0$ dans M. Comme $(a^{n+k}, b^{n+k}) = 1$, il existe $u, v \in A$ tels que $a^{n+k}u + b^{n+k}v = 1$. Posons alors $x = a^n y' u + b^n z' v$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} b^{n+k}x &= b^{n+k}a^n y' u + b^n(b^{n+k}v)z' \\ &= b^{n+k}a^n y' u + b^n(1 - a^{n+k}u)z' \\ &= b^n z' + (ab)^n(b^k y' - a^k z')u \\ &= b^n z'. \end{aligned}$$

De même, on montre que $a^{n+k}x = a^n y'$. Cela prouve que $f(x) = (y, z)$ et donc que $\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

Plus généralement, si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de A qui engendre tout A en tant qu'idéal, on a une suite exacte :

$$0 \to M \to \prod_{i \in I} M\left[\frac{1}{a_i}\right] \to \prod_{(i,j) \in I^2} M\left[\frac{1}{a_i a_j}\right].$$

Remarque : Pour comprendre géométriquement la situation, il convient de voir M comme un ensemble de fonctions sur un objet géométrique X associé à A. Le module $M[1/a]$ (resp. $M[1/b]$, $M[1/(ab)]$) correspond alors aux fonctions définies sur l'ouvert X_a (resp. X_b, X_{ab}) de X défini par l'équation $a \neq 0$ (resp. $b \neq 0$, $ab \neq 0$). En particulier, X_{ab} est $X_a \cap X_b$. De plus, dire que $(a, b) = A$ signifie géométriquement que $X_a \cup X_b = X$. Avec ces interprétations, la suite exacte :

$$0 \to M \to M\left[\frac{1}{a}\right] \oplus M\left[\frac{1}{b}\right] \to M\left[\frac{1}{ab}\right]$$

signifie que :

(i) Si f et g sont des fonctions sur $X = X_a \cup X_b$ telles que $f|_{X_a} = g|_{X_a}$ et $f|_{X_b} = g|_{X_b}$, alors f est nulle ;

(ii) Si f_a et f_b sont des fonctions sur X_a et X_b respectivement telles que $f_a|_{X_a \cap X_b} = f_b|_{X_a \cap X_b}$, alors il existe f fonction sur $X = X_a \cup X_b$ telle que $f|_{X_a} = f_a$ et $f|_{X_b} = f_b$.

Exercice 13 : Propriétés locales et globales, le retour

Soient A un anneau et M, N et P des A-modules.

1. Soit S une partie multiplicative de A. On se donne deux morphismes de A-modules $f : M \to N$ et $g : N \to P$ tels que $M \to N \to P$ est une suite exacte de A-modules. Montrer qu'elle induit une suite exacte de $S^{-1}A$-modules :

$$S^{-1}M \to S^{-1}N \to S^{-1}P.$$

Indications : Bien sûr, la composée $S^{-1}g \circ S^{-1}f$ est nulle. Il reste donc à montrer que $\mathrm{Ker}(S^{-1}g) \subseteq \mathrm{Im}(S^{-1}f)$.

Soit $y \in \mathrm{Ker}(S^{-1}g)$. On écrit $y = z/s$ avec $z \in N$ et $s \in S$. On a $0 = S^{-1}g(y) = g(z)/g(s)$. Donc il existe $t \in S$ tel que $tg(z) = 0$. On en déduit qu'il existe $x \in M$ tel que $f(x) = tz$. Cela prouve que $S^{-1}f(x/t) = z$ et donc que $\mathrm{Ker}(S^{-1}g) \subseteq \mathrm{Im}(S^{-1}f)$.

2. Montrer que le morphisme naturel $M \to \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A} M_{\mathfrak{m}}$ est injectif. En déduire que $M = 0$ si, et seulement si, $M_{\mathfrak{m}} = 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

Indications : Soit f le morhisme $M \to \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A} M_{\mathfrak{m}}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Soit $I = \{a \in A | ax = 0\}$. C'est un idéal de A. Comme l'image de x dans $M_{\mathfrak{m}}$ est nulle, il existe $s \in A \setminus \mathfrak{m}$ tel que $sx = 0$. On en déduit que A n'est pas contenu dans $\mathfrak{m}$. Cela étant vrai pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A$, l'idéal I n'est contenu dans aucun idéal maximal. Donc $I = A$ et $x = 0$.

3. On se donne deux morphismes de A-modules $f : M \to N$ et $g : N \to P$. Montrer que la suite $0 \to M \to N \to P \to 0$ est exacte si, et seulement si, la suite $0 \to M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}} \to P_{\mathfrak{m}} \to 0$ est exacte pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

Indications : Supposons que la suite $0 \to M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}} \to P_{\mathfrak{m}} \to 0$ est exacte pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$. On a un diagramme commutatif à lignes exactes et dont les flèches verticales sont injectives :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A} M_{\mathfrak{m}} \arrow[r] & \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A} N_{\mathfrak{m}} \arrow[r] & \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A} P_{\mathfrak{m}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Cela montre immédiatement que f est injectif et que $g \circ f = 0$.

Soit maintenant $p \in P$. Soit $I = \{a \in A | ap \in \mathrm{Im}(g)\}$. C'est un idéal de A. Pour chaque $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A$, soit $n_{\mathfrak{m}} \in N_{\mathfrak{m}}$ tel que son image dans $P_{\mathfrak{m}}$ soit $p/1$. On écrit $n_{\mathfrak{m}} = n'_{\mathfrak{m}}/s_{\mathfrak{m}}$ avec $n'_{\mathfrak{m}} \in N$ et $s_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{m}$. Il existe alors $t_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{m}$ tel que $t_{\mathfrak{m}}(g(n'_{\mathfrak{m}}) - ps_{\mathfrak{m}}) = 0$. Cela prouve que $t_{\mathfrak{m}}s_{\mathfrak{m}} \in I$. Donc I n'est pas contenu dans $\mathfrak{m}$. Il n'est contenu dans aucun idéal maximal. Donc $I = A$ et $p \in \mathrm{Im}(g)$. Le morphisme g est bien surjectif.

La preuve du fait que $\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ est analogue.

4. Est-il vrai que M est libre si, et seulement si, $M_{\mathfrak{m}}$ est libre pour tout

$\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$?

> **Indications :** Non ! Pour le voir, on peut choisir par exemple $A = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et M l'idéal de A engendré par $(1, 0)$.

Remarque : Géométriquement, il faut voir M comme une famille "continue" $(M_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A}$ de $A_{\mathfrak{p}}$-modules.