TD 8 : Fonctions entières

Exercices : à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices : seront traités en classe en priorité.
Exercices : plus difficiles.

Exercice 1: Calculer $\prod_{k\geq 0}(1+z^{2^k})$ pour $z \in D(0,1)$.

Exercice 2:

1. Soit D le disque unité ouvert. Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $D\setminus\{0\}$ telle que
$$\sum_{n\geq 1}(1-|z_n|) < +\infty.$$
Montrer que la formule
$$f(z) = \prod_{n\geq 1}\frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n - z}{1-\overline{z_n}z}$$
définit une fonction holomorphe bornée sur D, dont on précisera les zéros.
2. Réciproquement, montrer que si f est une fonction holomorphe bornée non identiquement nulle sur le disque unité ouvert D, et si $(z_n)_n$ désigne la suite des zéros de f, alors la série
$$\sum_n (1-|z_n|)$$
converge.
3. On note $U = \{z, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Montrer que si f est holomorphe bornée sur U et s'annule en $z_1, z_2, \ldots$ avec $\inf |z_n| > 0$ et $\sum_n \mathrm{Re}(1/z_n) = +\infty$, alors f est nulle.
On pourra considérer l'homographie $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$.

Exercice 3: (pour la semaine du 9 avril)

Soit $\tau \in \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Montrer que la fonction :
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto (1-e^{2\pi i z})\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i(n\tau+z)})(1-e^{2\pi i(n\tau - z)})$$
est bien définie et est entière. Dire quels sont ses zéros.

Exercice 4: Soient f une fonction entière et $n > 0$ un entier. Montrer qu'il existe une fonction entière g telle que $g^n = f$ si, et seulement si, les ordres des zéros de f sont tous divisibles par n.

Exercice 5: (pour la semaine du 9 avril)

Soient f et g des fonctions entières d'ordre ρ. On suppose que f/g est entière. Montrer que f/g est entière d'ordre $\leq \rho$.

Exercice 6: (pour la semaine du 9 avril)

Soit g une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles d'ordre au plus 1 et des résidus entiers. Montrer qu'il existe une fonction méromorphe f telle que $f'/f = g$.

Exercice 7:

1. Soit $\rho \in]0,\infty[$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $R_N = (Ne)^{1/\rho}$ et $u_n = n\ln(R_N) - n\ln(n)/\rho$ pour $n \geq 1$. Vérifier que $\max_{n\geq 1} u_n$ est atteint en $n = N$ et que si $N \geq 2$ et $n > N^2$ on a :
$$u_n - u_N \leq -n\frac{\ln(N)}{\rho}\left(1 - \frac{1}{\ln(N)}\right).$$

Montrer alors que dès que N est suffisamment grand, on a

$$\sum_{n\geq 1} \exp(u_n) \leq (N^2+2)\exp(u_N).$$

2. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière dont l'ordre de croissance ρ_f est fini. On pose :

$$\tilde{\rho}_f := \inf\{\rho > 0 : \sup_{n\geq 1} |a_n| n^{n/\rho} < +\infty\}.$$

(a) Montrer que $\rho_f \leq \tilde{\rho}_f$. En déduire la construction d'une fonction entière non polynomiale d'ordre 0.

(b) Montrer qu'on a aussi $\rho_f \geq \tilde{\rho}_f$.

Exercice 8:

1. On note $f(z) = \tan(z) - z$. Où sont les pôles de f ? Où sont les zéros de f sur l'axe réel ? A l'aide du contour C_N délimitant le carré centré en l'origine de côtés de longueur $2\pi N$ ($N \geq 1$ entier), montrer que toutes les solutions de l'équation $\tan(z) = z$ sont réelles.

2. On note x_n l'unique solution de l'équation $\tan(x) = x$ dans l'intervalle $\left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{10}.$$

Exercice 9:

1. Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite injective de complexes telle que $|z_n| \to +\infty$. Soit également $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite de polynômes à coefficients complexes. En développant en série entière $z \mapsto P_n(1/(z-z_n))$ sur $D(0,|z_n|)$, montrer qu'il existe une suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ de polynômes telle que la série de fonctions

$$z \mapsto \sum_n P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - Q_n(z)$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \{z_n,\ n \geq 1\}$.

2. En déduire que si l'on se donne une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ comme ci-dessus, des entiers $d_n \geq 1$ et des complexes $a_{n,0}, \ldots, a_{n,d_n}$ pour chaque $n \geq 1$, alors il existe $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ telle que pour tout $n \geq 1$ et tout $0 \leq k \leq d_n$,

$$h^{(k)}(z_n) = a_{n,k}.$$

3. Soient $f, g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ n'ayant pas de zéro commun. Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe $h_1, h_2 \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ telles que $f + h_1 g = e^{h_2}$.

4. Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ telle que

$$f_1\mathscr{O}(\mathbb{C}) + \ldots + f_n\mathscr{O}(\mathbb{C}) = h\mathscr{O}(\mathbb{C})$$

où

$$f_1\mathscr{O}(\mathbb{C}) + \ldots + f_n\mathscr{O}(\mathbb{C}) := \left\{u_1 f_1 + \ldots + u_n f_n \mid u_k \in \mathscr{O}(\mathbb{C})\right\}.$$

On dit que $\mathscr{O}(\mathbb{C})$ est un *anneau de Bézout*.

5. Donner un exemple de famille $(f_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{O}(\mathbb{C})$ telle que

$$\left\{u_1 f_1 + \ldots + u_r f_r \mid r \geq 1,\ \forall k\ u_k \in \mathscr{O}(\mathbb{C})\right\}$$

ne soit pas de la forme $h\mathscr{O}(\mathbb{C})$, avec $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$.

Exercice 10: Soit (a_n) une suite de nombres complexes avec $|a_n| \to +\infty$. Montrer qu'il existe une fonction entière $\sum b_k z^k$ s'annulant exactement en les a_n, avec $b_k \in \mathbf{Q}(i)$ pour tout k. Montrer que si les a_n sont réels, on peut même choisir les b_k dans $\mathbf{Q}$.

Exercice 11: Soit f une fonction entière non constante dont tous les zéros sont réels, telle que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, et dont l'ordre est strictement inférieur à 2. En considérant $\mathrm{Im}(f'/f)$, montrer que tous les zéros de f' sont réels.

Exercice 12: Prouver que toute fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ est le quotient de deux fonctions entières.