École Normale Supérieure
21 Novembre 2017

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$8 Corrigé

Connexité et choses annexes

Exercice 1 : homotopies et logarithmes

1. La relation est clairement réflexive, symétrique (changer t en $1-t$) et transitive (concaténer les deux homotopies). La compatibilité avec la composition vient juste du fait que la composée d'applications continues est continue.

2. Quitte à appliquer une rotation, on peut supposer que c'est la valeur -1 qui n'est pas prise. il est clair que l'application $]0;2\pi[\to S^1-\{-1\}$ est un homéomorphisme, le résultat en découle.

3. Soit H une homotopie entre f_0 et f_1. H est continue sur un compact, donc uniformément continue. Il existe n tel que si $|t-t'|<\frac{1}{n}$, alors $\|H_t-H_{t'}\|_\infty<2$. Montrons alors par récurrence que $H_{\frac{k}{n}}$ a un relèvement. C'est le cas de $H_0=f_0$. Maintenant, $\frac{H_{\frac{k+1}{n}}}{H_{\frac{k}{n}}}$ évite la valeur -1 puisque $|H_{\frac{k+1}{n}}-H_{\frac{k}{n}}|<2$, elle est donc relevable. La somme d'un relèvement de ce quotient et d'un relèvement de $H_{\frac{k}{n}}$ fournit un relèvement de $H_{\frac{k+1}{n}}$.

4. On suppose que le compact est étoilé par rapport à 0. Si f est une application de X dans S^1, l'application $H_t(x):=f(tx)$ fournit une homotopie entre f et l'application constante $f(0)$, qui est relevable, donc f aussi.
Deux relèvements diffèrent d'une application à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Si l'espace de départ est connexe, une telle application est constante, le relèvement est donc unique si l'on fixe l'image d'un point.

5. On peut écrire $\mathbb{R}^n=\bigcup_m\overline{\mathcal{B}}(0,m)$. Il est possible de relever les applications sur chacune des boules, l'unicité permettant de recoller les applications en une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$.

6. a) Si S^1 était un rétracte du disque, on pourrait prolonger l'identité du disque en $D\to S^1$. On pourrait donc relever cette application en $D\to\mathbb{R}$ d'où l'on déduit une factorisation de l'identité du cercle par $S^1\to\mathbb{R}\to S^1$. L'application $S^1\to\mathbb{R}$ est injective et continue, c'est donc un homéomorphisme de S^1 vers son image, qui est un compact connexe de $\mathbb{R}$, c'est à dire un intervalle. C'est absurde. Le cercle n'est donc pas rétracte du disque.
b) S'il existait une application sans point fixe, l'application qui à $x\in D$ associe le point d'intersection avec S^1 de la demi-droite $[f(x);x)$ fournit une rétraction du disque sur le cercle, ce qui est interdit.

Exercice 2 : application du théorème de Brouwer

1. Soit A tel que $\|x-y\|>A$ implique $\|f(x)\|\leq\|x\|-2\|y\|$, B le supremum de $\|f(x)-y\|$ sur la boule de centre y et rayon A. Alors $R:=\max(A,b)$ répond à la question :

- Si $\|x-y\|\leq A$, alors $\|g_y(x)\|\leq B\leq R$,

- Si $A < \|x-y\| \leq R$, alors

$$\|g_y(x)\| \leq \|f(x)\| + \|y\| \leq \|x\| - 2\|y\| + \|y\| \leq \|x-y\| \leq R.$$

2. Résoudre $g(x) = y$ revient à résoudre $g_y(x) = x$. On a montré en question 1 l'existence d'une boule compacte stable par g_y, le théorème de Brouwer assure alors l'existence d'un point fixe.

3. Non : on peut prendre $f(x) = 2\sin x$ en dimension 1.

Exercice 3 🏠✐ : une autre application du théorème de Brouwer

1. Si l'on raisonne par l'absurde et que les courbes ne s'intersectent pas, l'application est effectivement bien définie. D'après le théorème de Brouwer, comme cette application est bien continue, elle admet un point fixe.

2. Le point fixe est nécessairement au bord puisque f est à valeurs dans la sphère unité.

3. Le point fixe (s,t) est au bord, il est donc avec s ou t égal à ± 1. Si on note $\rho := \|\gamma(s) - \delta(t)\| > 0$, on a

$$\begin{cases} -\gamma_1(s) + \delta_1(t) = s\rho \\ -\delta_2(t) + \gamma(s) = t\rho \end{cases}$$

Dans chacun des cas on aboutit à une contradiction : par exemple si $s = 1$, alors $\rho = -b + \delta_1(t) \leq 0$, ce qui est absurde, de même dans chacun des autres cas.

Exercice 4 ✐✐ : sur les homéomorphismes des couronnes

1. La fonction f est un homéomorphisme, l'image directe comme l'image réciproque d'un compact est donc compacte. Soit donc K la couronne fermée $\mathcal{C}(1+\varepsilon, 2-\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$. L'image réciproque de K est un compact qui ne rencontre pas le bord de A, et s'en trouve donc à une distance strictement positive, disons δ. Si $d(z, A^c) < \delta$, alors $d(f(z), \partial A) < \varepsilon$ et c'est ce qu'on voulait.

2. $f^{-1}(K)$ est un compact de A, qui est donc à une distance strictement positive de A^c. Donc Pour ε assez petit, $A_\varepsilon \cap f^{-1}(K) = \emptyset$, donc $f(A_\varepsilon) \cap K = \emptyset$ aussi.

3. $f(A_\varepsilon)$ est connexe, il ne peut donc à la fois rencontrer B et $A - \overline{B}$ puisqu'il ne rencontre pas K.

4. Supposons que $f(A_{\varepsilon_0}) \subset B$. On sait que la distance de $f(z)$ à ∂A tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers 1. $|f(z)|$ tend donc vers 1 ou 2. Mais comme on est dans B, cela vaut forcément 1. On procède de même dans l'autre cas. Les limites sont différentes car f est un homéomorphisme.

Exercice 5 🏠✐ : $\mathbb{R}^n$ comme union de fermés connexes

1. Il suffit de prendre un demi-espace fermé, et un demi-espace ouvert auquel on a rajouté quelques points de son adhérence.

2. $A_0 \cap A_1$ est un fermé de $\mathbb{R}^n = A_0 \cup A_1$, on peut donc prolonger φ en $\varphi*$ continue définie sur $\mathbb{R}^n$. Les fonctions $\varphi_1 := \varphi*_{|A_1}$ et $\varphi_0 = 0$ répondent à la question.

3. La fonction f est bien définie puisque φ_1 et φ_0 diffèrent d'un entier sur $A_0 \cap A_1$. Les A_j étant fermés, l'application est continue en tant que recollement d'applications continues. On applique le premier exercice de la feuille pour l'existence de g.

4. Les A_j étant connexes, par unicité du relèvement à constante entière près s'il existe sur une partie connexe, $\varphi_j = g - a_j$ où $a_j \in \mathbb{Z}$ sur A_j. On a donc sur $A_0 \cap A_1$ $\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 = a_0 - a_1$ qui est donc bien constante, ce qui achève de montrer la connexité de l'intersection.

Exercice 6

Soit A un fermé non vide de $[0;1]^2$ tel que pour tout $x \in [0;1]$, $I_x := \{y \ : \ (x,y) \in A\}$ soit un segment.

1. Soient F_1 et F_2 deux fermés qui recouvrent A. Ils sont compacts car ce sont des fermés d'un compact. Leurs projections sur l'axe des abscisses sont donc également compacts, ce sont par conséquent des fermés qui recouvrent $[0;1]$. Ils sont bien disjoints : si $a \in p(F_1) \cap p(F_2)$, F_1 et F_2 recouvrent I_a et sont disjoints, donc l'un des deux est vide par connexité de I_a, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $a \in p(F_1) \cap p(F_2)$. Par connexité de $[0;1]$, l'un des deux est vide et c'est ce qu'on voulait.

2. L'image de A par la fonction continue $(x,y) \mapsto y - x$ est connexe, c'est donc un intervalle. La fonction prend des valeurs positives car $I_0 \neq \emptyset$ et négatives car $I_1 \neq \emptyset$, elle prend donc la valeur 0.

Exercice 7 : groupe fondamental du cercle

1. a) C'est clair.

b) Il s'agit juste d'utiliser le fait que l'homotopie est préservée par la composition avec une application continue.

2. a) Cela a déjà été essentiellement fait dans l'exercice 1. On va montrer une propriété un peu plus forte dite de relèvement des homotopies. Si $h : X \times I \to S^1$ (où X est un espace quelconque) est une homotopie et H_0 est un relèvement de h_0, alors peut relever h en une unique homotopie H prolongeant H_0.

- Commençons par montrer l'unicité, supposons que l'on ait deux relèvements possibles. En se restreignant aux composantes connexes de X, il est possible de supposer l'espace de départ connexe. Soient H et G deux homotopies prolongeant H_0. On peut déjà remarquer que l'ensemble où $\{H = G\} \subset X \times I$ est fermé puisque H et G sont continues. Il est également ouvert puisque l'application $(x,t) \mapsto H_t(x) - G_t(x) \in \mathbb{R}$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc constante. Ainsi, on a bien unicité du relèvement.
- Montrons maintenant l'existence d'un tel relèvement. L'unicité démontrée précédemment permet de démontrer le relèvement localement : en effet, s'il existe un relèvement au voisinage de chaque point, ceux-ci coïncident sur les intersections des voisinages puisque l'on a unicité du relèvement, il est donc possible de recoller ces applications en un relèvement global. Soit donc $x_i n X$. Par continuité de h, pour tout t il existe un voisinage de (x,t) tel que son image par h ne rencontre pas $-h_t(x)$. Par compacité de $[0;1]$, on peut donc trouver un voisinage U de x et une subdivision (t_i) de $[0;1]$ telle que pour tout i h restreinte à $U \times [t_i;t_{i+1}]$ ne soit pas surjective. On a alors par récurrence comme dans l'exercice 1 l'existence du relèvement souhaité.

Le lacet γ peut être vu comme une application de $\{*\} \times [0;1]$ vers S^1, c'est à dire une homotopie

entre des applications sur $\{*\}$, on a donc le résultat voulu grâce à la propriété de relèvement des homotopies.
b) $\exp(g(1)) = \exp(g(0)) = 1$, donc on a bien $g(1) \in \mathbb{Z}$. Cet entier est bien indépendant de la classe d'homotopie de γ : si γ' est un chemin homotope à γ, qui se relève en g, la propriété de relèvement des homotopies assure qu'il existe une homotopie $H : [0;1] \times [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $H_0 = g$. H_1 fournit alors un relèvement de γ'. Il est clair que $H_t(0) = 0$ puisque $t \mapsto H_t(0)$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, elle est donc constante. Par unicité, H_1 est donc l'unique relèvement de γ', ainsi $I(\gamma') = H_1(1)$. de plus, l'application $t \mapsto H_t(1)$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc constante, ainsi on a bien $g(1) = H_0(1) = H_1(1) = I(\gamma')$.
c)

- Notons φ cette application. Le lacet constant réalise la classe d'homotopie du neutre de $\pi_1(S^1)$ et a bien pour indice 0 puisqu'il se relève en l'application constante nulle.
- φ respecte bien les opérations. Soient γ et δ deux lacets. Soit $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\delta}$ leurs relèvements respectifs. Alors l'application

$$t \in [0;2] \longmapsto \begin{cases} \tilde{\gamma}(t) \text{ si } t \leq 1 \\ \tilde{\gamma}(1) + \tilde{\delta}(t-1) \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$$

  est un relèvement de $\gamma * \delta$, donc le seul. On a donc bien

$$I(\gamma * \delta) = I(\gamma) + I(\delta).$$

- Le lacet $t \mapsto e^{2i\pi nt}$ est clairement d'indice n, de sorte que φ est surjective.
- Pour montrer l'injectivité, soit γ un lacet d'indice nul. Cela veut dire que $\tilde{\gamma}$ est également un lacet dans $\mathbb{R}$, et il est donc homotope à un lacet constant. (puisque $\mathbb{R}$ est étoilé par rapport à 0 par exemple) En composant par exp, on obtient une homotopie entre γ et le lacet constant, ce qui achève de montrer l'injectivité de φ.

Maintenant quelques applications :
3. [**Brouwer**] On veut de nouveau montrer qu'il n'existe pas de rétraction de S^1 sur D. Une telle application permettrait de factoriser l'identité de S^1 en

$$S^1 \longrightarrow D \longrightarrow S^1,$$

ce qui donne une factorisation de l'identité de $\pi_1(S^1)$ en

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \{0\} = \pi_1(D) \longrightarrow \mathbb{Z} = \pi_1(S^1),$$

ce qui est absurde. Il n'y a donc pas de rétraction et le théorème est démontré.
4. [**Borsuk-Ulam**] On va montrer que pour toute application continue $S^2 \to R^2$ il existe deux points antipodaux où elle prend la même valeur.
a) L'application est bien continue en tant que composée d'applications continues, et elle est clairement impaire.
b) En restreignant à un méridien on obtient bien un lacet γ. Soit p le relèvement de ce lacet. L'application g étant impaire, en paramétrant le méridien par $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$, il vient

que $\gamma(t+\frac{1}{2}) = -\gamma(t)$. Ainsi, la fonction $t \mapsto p(t+\frac{1}{2})-p(t)$ est à valeurs demi-entières puisqu'elle est envoyée sur -1 par exp. Comme elle est également continue, elle est constante égale à $\frac{c}{2}$ où c est un entier impair. Il suffit ensuite juste de remarquer que

$$p(1) = p(\frac{1}{2}) + \frac{c}{2} = p(0) + c = c$$

et donc que l'indice du lacet est bien égal à c, impair.
c) Il est possible de déformer le méridien en un pôle, ce qui fournit une homotopie avec un lacet constant, qui est d'indice nul, c'est absurde. Il existe donc bien deux points antipodaux ayant la même valeur par f.

5. [**Sandwich au Jambon**] Un coup de couteau est un hyperplan, il est donc caractérisé par une direction (un point de la sphère) et une coordonnée d'intersection avec la droite dirigée par cette direction orthogonale. Etant donnée une direction fixée, il existe un coup de couteau qui permet de séparer le pain exactement en deux (l'ensemble de ces coups de couteau est un segment, on peut en prendre le milieu pour fixer les choses). La fonction qui à la direction associe cette coordonnée est impaire (puisque au point opposé correspond la même direction mais à l'envers. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème de Borsuk-Ulam à la fonction qui regarde le volume du jambon et du fromage. (qui est bien continue mais ça c'est plus du cours d'intégration.

Espaces de Banach et un peu plus de théorèmes de point fixes

Exercice 8 : théorème du point fixe de Schauder

1. Nous allons montrer que $\text{Conv}(K)$ est précompacte dans E. Cela impliquera que $\overline{\text{Conv}(K)}$ l'est aussi : si $\text{Conv}(K) \subset \bigcup\limits_{k \leq N} B(x_k, \epsilon)$, alors $\overline{\text{Conv}(K)} \subset \bigcup\limits_{k \leq N} \overline{B(x_k, \epsilon)} \subset \bigcup\limits_{k \leq N} B(x_k, 2\epsilon)$.
Cela impliquera donc que $\overline{\text{Conv}(K)}$ est compacte, puisque c'est un espace complet (car il s'agit d'une partie fermée d'un espace complet).
Soit $\epsilon > 0$ quelconque.
Soient $x_1, ..., x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup\limits_{k \leq n} B(x_k, \epsilon/2)$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{n}{N} \sup\limits_{k \leq n} ||x_k|| < \epsilon/2$.
Posons $\mathcal{F} = \left\{\frac{k_1}{N} x_1 + ... + \frac{k_n}{N} x_n \text{ tq } k_1, ..., k_n \in \{0, ..., N\}\right\}$. Montrons que $\text{Conv}(K) \subset \bigcup\limits_{y \in \mathcal{F}} B(y, \epsilon)$.
Soit $Z \in \text{Conv}(K)$ quelconque. Il existe $t_1, ..., t_R \in [0; 1]$ et $z_1, ..., z_R \in K$ tels que $t_1 + ... + t_R = 1$ et $t_1 z_1 + ... + t_R z_R = Z$. Pour tout $r \leq R$, soit k_r tel que $z_r \in B(x_{k_r}, \epsilon/2)$.
Alors $||Z - \sum\limits_r t_r x_{k_r}|| \leq \sum\limits_r t_r ||z_r - x_{k_r}|| < \epsilon/2$.
Posons, pour tout $k \leq n$, $T_k = \sum\limits_{k_r = k} t_r$. On a alors $||Z - \sum\limits_k T_k x_k|| < \epsilon/2$.

Si on note K_k la partie entière de NT_k, pour tout k, on a de plus :

$$\left|\left|\left(\sum_{k\leq n} T_k x_k\right) - \left(\sum_{k\leq n} \frac{K_k}{N} x_k\right)\right|\right| \leq \sum_{k\leq n} \left|T_k - \frac{K_k}{N}\right| .||x_k|| \leq \frac{n}{N} \sup_{k\leq n} ||x_k|| < \epsilon/2$$

On en déduit :

$$\left|\left|Z - \left(\sum_k \frac{K_k}{N} x_k\right)\right|\right| < \epsilon$$

On a donc montré que $Z \in \bigcup_{y\in\mathcal{F}} B(y,\epsilon)$.

2. a) $\left|\left|\frac{\sum_k y_k.d(x,E-B(y_k,\epsilon))}{\sum_k d(x,E-B(y_k,\epsilon))} - x\right|\right| = \left|\left|\frac{\sum_k (y_k-x).d(x,E-B(y_k,\epsilon))}{\sum_k d(x,E-B(y_k,\epsilon))}\right|\right| \leq \frac{\sum_k ||y_k-x||.d(x,E-B(y_k,\epsilon))}{\sum_k d(x,E-B(y_k,\epsilon))} \leq \epsilon$

La dernière inégalité provient du fait que, pour tout k, $d(x,E-B(y_k,\epsilon)) = 0$ si $||x-y_k|| \geq \epsilon$, ce qui fait que, pour tout k :

$$||y_k - x||d(x,E-B(y_k,\epsilon)) \leq \epsilon d(x,E-B(y_k,\epsilon))$$

b) Restreinte à Conv$(\{y_1,...,y_n\})$, l'application ψ est une fonction continue à valeurs dans Conv$(\{y_1,...,y_n\})$. L'ensemble Conv$(\{y_1,...,y_n\})$ est un convexe compact inclus dans un sous-espace vectoriel de E de dimension au plus n. D'après le théorème de Brouwer, ψ admet donc un point fixe sur cet ensemble.
(La compacité de Conv$(\{y_1,...,y_n\})$ provient du fait que, si on pose $A = \{(t_1,...,t_n) \in [0;1]^n$ tq $t_1 + ... + t_n = 1\}$, alors A est compact et Conv$(\{y_1,...,y_n\})$ est l'image de A par l'application $(t_1,...,t_n) \in A \to t_1y_1 + ... + t_ny_n$ qui est continue.)
c) Soit x_ϵ le point fixe de la question précédente. Il appartient à C.
$||f(x_\epsilon) - x_\epsilon|| = ||f(x_\epsilon) - \phi(f(x_\epsilon))|| < \epsilon$.
Puisque C est compacte (et incluse dans un espace métrique), on peut extraire de $(x_{1/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente. Si on note x_∞ la limite de cette sous-suite, alors, par continuité, $||f(x_\infty) - x_\infty|| = 0$ donc $f(x_\infty) = x_\infty$.

3. Notons $C_2 = \overline{\text{Conv}(\overline{f(C)})}$. D'après la question 1., c'est un compact de E. C'est aussi un ensemble convexe.
L'ensemble C_2 est inclus dans C. Restreinte à C_2, l'application f est une application continue d'un convexe compact de E dans lui-même. D'après 2., elle admet donc un point fixe dans C_2, qui est aussi un point fixe dans C.

Exercice 9 ✐✐✐ : théorème du point fixe de Schaefer

On ne peut pas appliquer directement le théorème de Schauder car l'image de T n'est pas nécessairement d'adhérence compacte.
Nous allons définir un opérateur S qui coïncidera avec T sur une boule de rayon assez grand et dont l'image sera d'adhérence compacte.
Soit $R > 0$ tel que $\{x \in E$ tq $\exists\lambda \in [0;1], x = \lambda T(x)\} \subset B(0,R)$.
Définissons $S(x) = T\left(\frac{x}{\max(1,||x||/R)}\right)$, pour tout $x \in E$. C'est une application continue car c'est une composée d'applications continues.

Pour tout $x \in E$, $\left|\left|\frac{x}{\max(1,||x||/R)}\right|\right| \leq R$ donc $S(E) \subset T(\overline{B}(0,R))$. D'après (1), $\overline{S(E)}$ est compacte. Puisque E est un convexe fermé de E, on peut appliquer à S le théorème de Schauder : S admet un point fixe, qu'on note x_0.
On a $||x_0|| < R$. En effet, sinon, $T(Rx_0/||x_0||) = S(x_0) = x_0$, ce qui implique que $\frac{Rx_0}{||x_0||} = \frac{R}{||x_0||}T\left(\frac{Rx_0}{||x_0||}\right)$. Or $0 \leq \frac{R}{||x_0||} \leq 1$ donc, par définition de R, on devrait avoir $R > \left|\frac{Rx_0}{||x_0||}\right| = R$. C'est absurde.
Donc $x_0 = S(x_0) = T(x_0)$ et T admet bien un point fixe.