École Normale Supérieure
21 Novembre 2017

Topologie, analyse et calcul différentiel

# Feuille d'exercices n°8

## Connexité et choses annexes

**Exercice 1 : homotopies et logarithmes**

Si $f$ et $g$ sont deux applications continues $f, g : X \to Y$, on dit qu'elles sont homotopes s'il existe une application continue $H : (x,t) \in X \times [0;1] \mapsto H_t(x) \in Y$ telle que $H_0 = f$ et $H_1 = g$.

1. Montrer que l'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions, et que celle-ci est compatible avec la composition.

On étudie la possibilité à écrire les applications continues $f : X \to S^1$ sous la forme $e^{2i\pi g}$. C'est à dire factoriser par l'application $\mathbb{R} \to S^1$.

2. Montrer que si $f$ n'est pas surjective, cela est possible. (montrer qu'on peut supposer que $-1$ n'est pas atteint, puis utiliser la fonction argument donnée par $2\arctan\left(\frac{y}{1+x}\right)$.)

3. Soit $X$ un espace métrique compact, et $f_0$ et $f_1$ deux applications continues homotopes. On va montrer que si $f_0$ est relevable, alors $f_1$ aussi. On note $H$ une homotopie entre $f_0$ et $f_1$.
a) Montrer qu'il existe des valeurs $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ telles que $\|H_{t_{i+1}} - H_{t_i}\|_\infty < 2$.
b) En déduire que chacune des fonctions $x \mapsto \frac{H_{t_{i+1}}(x)}{H_{t_i}} \in S^1$ est relevable.
c) Conclure que si $f_0$ est relevable, $f_1$ l'est aussi.

4. Montrer que dans le cas où $X$ est un compact étoilé de $\mathbb{R}^n$, toute application continue est relevable. On rappelle que $X$ est étoilé s'il existe $x_0 \in X$ tel que $\forall x \in X\ [x, x_0] \subset X$. (remarquer que $H_t(x) := tx_0 + (1-t)x$ est une homotopie entre l'identité et l'application constante égale à $x_0$, puis utiliser les questions 3 et 1.) Un tel relèvement est-il unique ?

5. Montrer que le résultat subsiste pour $\mathbb{R}^n$.

On va maintenant démontrer le théorème de Brouwer en dimension 2. Soit $X$ un espace topologique. On dit qu'une partie $A \subset X$ est un rétracte de $X$ si l'identité de $A$ se prolonge en une application continue $X \to A$.

6. a) En montrant qu'il n'est pas possible de relever l'identité du cercle en une application vers $\mathbb{R}$, montrer que le cercle unité $S^1$ n'est pas un rétracte du disque unité.
b) En déduire le théorème de Brouwer en dimension 2 : toute application continue du disque unité dans lui-même possède un point fixe. (raisonner par l'absurde et construire une rétraction)

**Exercice 2 : une autre application du théorème de Brouwer**

On admet le théorème de Brouwer démontré dans l'exercice 1. On considère le rectangle $[a;b] \times [c;d]$ et deux courbes $\gamma, \delta : [-1;1] \to [a;b] \times [c;d]$ reliant les côtés opposés. (i.e. $\gamma_1(-1) = a$, $\gamma_1(1) = b$, $\delta_2(-1) = c$ et $\delta_2(1) = d$) On se propose de montrer que celles-ci s'intersectent.

1. Soit $f : I^2 \to \partial I^2$ définie par

$$f(s,t) := \left( \frac{\delta_1(t) - \gamma_1(s)}{\|\gamma(s) - \delta(t)\|}, \frac{\gamma_2(s) - \delta_2(t)}{\|\gamma(s) - \delta(t)\|} \right)$$

où $\| \bullet \|$ désigne la norme uniforme. Montrer que $f$ est bien définie et en déduire qu'elle admet un point fixe.

2. Montrer que ce point fixe est au bord.

3. Aboutir à une contradiction en réalisant l'examen des différents cas possibles.

**Exercice 3 : $\mathbb{R}^n$ comme union de fermés connexes**

On suppose que l'on peut écrire $\mathbb{R}^n = A_0 \cup A_1$ où $A_0$ et $A_1$ sont des fermés connexes. On va montrer que leur intersection l'est également.

1. Trouver un contrexemple lorsque $A_0$ et $A_1$ ne sont pas supposés fermés. (sauf si $n = 1$)

2. Soit $\varphi : A_0 \cap A_1 \to \mathbb{Z}$ une application continue. Montrer qu'il existe $\varphi_j : A_j \to \mathbb{R}$ continues avec $\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ sur $A_0 \cap A_1$. (prendre $\varphi_0 = 0$ et penser à Tietze & Urysohn pour trouver $\varphi_1$)

3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to S^1$ définie par $f(x) := e^{2i\pi\varphi_j(x)}$ suivant que $x$ est dans $A_0$ ou $A_1$.
a) Montrer que $f$ est bien continue.
b) Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue telle que $f = e^{2i\pi g}$.

4. Conclure.

**Exercice 4**

Soit $A$ un fermé non vide de $[0;1]^2$ tel que pour tout $x \in [0;1]$, $I_x := \{y \ : \ (x,y) \in A\}$ soit un segment.

1. Montrer que $A$ est connexe.

2. Montrer que $A$ rencontre la diagonale du carré.

**Exercice 5 : groupe fondamental du cercle**

Si $(X, x_0)$ est un espace topologique pointé (*i.e.* $x_0$ est un point de $X$), on note $\pi_1(X, x_0)$ l'ensemble des classes d'équivalence des chemins (c'est à dire les fonctions continues $\gamma : [0;1] \to X$ telles que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$.) pour la relation d'homotopie à extrémités fixées. (on impose qu'une homotopie entre les chemins garde la valeur $x_0$ aux extrémités de l'intervalle)

On définit la loi de composition suivante : si $\gamma$ et $\delta$ sont deux chemins,

$$\gamma * \delta(t) := \begin{cases} \gamma(2t) \text{ si } t \leq \frac{1}{2} \\ \delta(2t-1) \text{ si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases} .$$

1. a) A l'aide de dessins bien choisis dessinant des homotopies, montrer que la loi $*$ induit une structure de groupe sur l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$.
b) Montrer qu'une application continue $f : X \to Y$ induit un morphisme de groupes $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

On va montrer que le groupe fondamental du cercle est $\mathbb{Z}$. On considère l'application $\exp : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{2i\pi t} \in S^1$ et un chemin $\gamma : [0;1] \to (S^1, 1)$.

2. a) Montrer qu'il existe une unique application continue $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma = \exp \circ g$ et $g(0) = 0$.
b) Montrer que $g(1)$ est un entier qui ne dépend que de la classe d'homotopie de $\gamma$. On note cet entier $I(\gamma)$.
c) Montrer que l'application $[\gamma] \in \pi_1(S^1, 1) \mapsto I(\gamma) \in \mathbb{Z}$ est un isomorphisme de groupes.

Maintenant quelques applications :

3. **[Brouwer]** Redémontrer le théorème de Brouwer en dimension 2 à la lumière de ces nouveaux outils.

4. **[Borsuk-Ulam]** On va montrer que pour toute application continue $S^2 \to R^2$ il existe deux points antipodaux où elle prend la même valeur.
a) Si par l'absurde une telle application $f$ ne vérifie pas ça, montrer que

$$g : x \in S^2 \longmapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \in S^1$$

définit bien une application impaire continue.
b) Montrer que si l'on restreint $g$ à un méridien, on obtient un lacet $S^1 \to S^1$ de degré impair.
c) Montrer que ce lacet est néanmoins homotope à une application constante puis conclure.

5. **[Sandwich au Jambon]** Soit un sandwich au jambon et au fromage dans l'espace, montrer qu'il est possible d'un seul coup de couteau (plan) séparer à la fois le pain, le jambon et le fromage en deux parts égales. (Étant donné une direction donnée, il est possible de couper le pain en deux, s'arranger pour que le jambon et le fromage le soient aussi en appliquant le théorème précédent.)

**Exercice 6 : application du théorème de Brouwer**

On admet le théorème de Brouwer démontré dans l'exercice 1. On considère une application continue $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telle que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \|x\| - \|f(x)\| = +\infty$$

où $\| \bullet \|$ est la norme euclidienne.

1. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ il existe un $R > 0$ tel que la fonction $g_y(x) := y - f(x)$ stabilise la boule $\overline{\mathcal{B}}(y, R)$.

2. Montrer que $g(x) := x + f(x)$ est surjective.

3. Est-elle aussi injective ?

**Exercice 7 : sur les homéomorphismes des couronnes**

Soit $A$ la couronne ouverte $\{1 < |z| < 2\}$ et $f$ un homéomorphisme de $A$ dans elle-même. On pose $B := \{1 < |z| < \sqrt{2}\} \subset A$. Soit $K := \partial B = \{|z| = \sqrt{2}\}$ le bord de $B$ dans $A$.

1. Montrer que $f$ est propre et qu'elle envoie le bord de $A$ sur le bord de $A$ au sens où si $d(x\partial A)$ tend vers 0, alors $d(f(x), \partial A)$ aussi.

2. Soit $A_\varepsilon := \{1 < |z| < 1 + \varepsilon\}$, montrer qu'il existe $\varepsilon_0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ $f(A_\varepsilon) \cap K = \emptyset$.

3. En déduire que pour un tel $\varepsilon$, $f(A_\varepsilon)$ est inclus soit dans $B$ soit dans $A - \overline{B}$.

4. En déduire qu'il existe $l, l' \in \{1, 2\}$ tels que lorsque $|z|$ tend vers 1 ou 2, $|f(z)|$ tende vers $l$ ou $l'$ respectivement. Montrer que $l \neq l'$.

## Espaces de Banach et un peu plus de théorèmes de point fixes

**Exercice 8 : questions diverses (que si le théorème de l'application ouverte a été vue)**

1. Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach. Soient $F_1, F_2$ deux sous-espaces vectoriels fermés de $E$ tels que $F_1 + F_2$ est fermé dans $E$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $z \in F_1 + F_2$, il existe $y_1 \in F_1$ et $y_2 \in F_2$ tels que $y_1 + y_2 = z$, $||y_1|| \leq C||z||$ et $||y_2|| \leq C||z||$.
[Indication : Considérer l'application $\phi : F_1 \times F_2 \to F_1 + F_2$ telle que $\phi(y_1, y_2) = y_1 + y_2$.]

2. Donner un exemple d'espace de Banach $E$ et deux sous espaces fermés en somme directe $E_1$ et $E_2$ tels que $E_1 \oplus E_2$ n'est pas fermé.

3. Soient $E, F$ deux espaces de Banach. Montrer que l'ensemble des applications linéaires continues et surjectives de $E$ dans $F$ est ouvert dans $\mathcal{L}_c(E, F)$ (l'ensemble des applications linéaires et continues de $E$ dans $F$).

**Exercice 9 : théorème du point fixe de Schauder**

Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach. Pour toute $C \subset E$, on note $\text{Conv}(C)$ l'enveloppe convexe de $C$.

1. Soit $K \subset E$ compacte. Montrer que $\overline{\text{Conv}(K)}$ est compacte.

2. On admet le théorème de Brouwer en dimension $n$. On va démontrer le théorème du point fixe de Tychonov : si $C \subset E$ est convexe et compacte, alors toute application continue $f : C \to C$ admet un point fixe. Soient $C$ et $f$ fixées.
a) Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Soient $y_1, ..., y_n \in C$ tels que : $C \subset \bigcup_{k \leq n} B(y_k, \epsilon)$. On pose, pour tout $x \in C$ :

$$\phi(x) = \frac{\sum_k y_k . d\left(x, E - B(y_k, \epsilon)\right)}{\sum_k d\left(x, E - B(y_k, \epsilon)\right)}.$$

Montrer que, pour tout $x \in C$, $||\phi(x) - x|| < \epsilon$.
b) Soit $\psi = \phi \circ f$. Montrer que $\psi$ admet un point fixe sur $\text{Conv}(\{y_1, ..., y_n\})$.
c) En déduire qu'il existe $x_\epsilon \in C$ tel que $||f(x_\epsilon) - x_\epsilon|| < \epsilon$. Conclure.

3. Démontrer le théorème du point fixe de Schauder : soit $C \subset E$ convexe et fermée. Soit $f : C \to C$ continue telle que $\overline{f(C)}$ est compacte. Alors $f$ admet un point fixe.

**Exercice 10 : théorème du point fixe de Schaefer**

Soit $E$ un espace de Banach. Soit $T : E \to E$ une application continue vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Si $\Omega \subset E$ est bornée, $\overline{T(\Omega)}$ est compacte.
2. $\{x \in E \text{ tq } \exists \lambda \in [0; 1], x = \lambda T(x)\}$ est borné.

Montrer que $T$ a un point fixe.
[Indication : Trafiquer $T$ pour que son image soit relativement compacte et utiliser l'exercice précédent.]