Td n° 8 d'Analyse fonctionnelle

Transformation de Fourier et Espaces de Sobolev

Séance du 12 avril 2013

Exercice 1. *Quelques questions sur les espaces de Sobolev H^s*

1. Vérifier que $\delta_0 \in H^s$ pour $s < -d/2$. Montrer que pour $s > d/2$, H^s s'injecte continument dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$

2. Montrer que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \cup_s H^s$.

3. Montrer que l'injection de H^{s_1} dans H^{s_2} pour $s_1 \geq s_2$ est continue.

4. On suppose maintenant que $s \in]d/2, d/2+1[$. Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$ et x, y, ξ :

$$|e^{ix\xi} - e^{iy\xi}| \leq 2|x-y|^\alpha |\xi|^\alpha.$$

En déduire que pour tout $\alpha \in]0, s-d/2[$, il existe $C(\alpha)$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^s}.$$

Conclure que $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$, ensemble des fonctions α-Holderiennes bornées.

⋆

Exercice 2. *L'équation des ondes*

1. Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N), u_1 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Résoudre dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$:

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - \Delta u = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \\ u(0,.) = u_0, \ \partial_t u(0,.) = u_1. \end{cases}$$

2. Soit $f \in L^1$. On suppose de plus Supp $\widehat{f} \subset \{\xi, 1 \leq |\xi| \leq 2\}$. Montrer que $\mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\hat{f}) = K(t,x) * f$, où

$$K(t,x) = \int \chi(\xi) e^{it|\xi| + ix.\xi},$$

avec χ radiale telle que $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et $|\xi| \geq 3$, et $\chi(\xi) = 1$ pour $1 \leq |\xi| \leq 2$.

3. Montrer que $|K(x,t)| \leq \frac{C}{t^{\frac{N-1}{2}}}$.

Indication : On pourra séparer les cas $|x| \leq \frac{t}{2}$, $\frac{t}{2} \leq |x| \leq 2t$ et $2t \leq |x|$.

4. En déduire une estimation de décroissance pour la solution de l'équation des ondes, avec des données initiales $u_0, u_1 \in L^1$ vérifiant l'hypothèse de la question 2.

⋆

Exercice 3. *L'équation de Schrödinger*

On considère l'équation sur $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} i\frac{\partial}{\partial t} u + \Delta u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

1. On suppose $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Résoudre l'équation (1) dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$.

On veut montrer qu'il est possible de résoudre cette équation pour $u_0 \in L^1(\mathbb{R}, L^2)$.

2. Justifier pourquoi la transformée de Fourier de $e^{it|\xi|^2}$ est bien définie.

3. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement négative, on a

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2}) = \sqrt{\frac{1}{4\alpha\pi}} e^{\frac{|x|^2}{4\alpha}}.$$

4. Montrer que cette égalité reste vraie, au sens de $\mathcal{S}'$, pour α imaginaire pur.

5. En déduire que l'on peut résoudre l'équation (1) pour $u_0 \in L^1$ et que la solution $u(t,x)$ vérifie, pour $t > 0$

$$\|u(t,.)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \|u_0\|_{L^1},$$

où C est une constante à déterminer.

⋆

Exercice 4. *Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin*

On veut montrer le résultat suivant : soit $1 \leq p_0 \neq p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0 \neq q_1 \leq \infty$ et T un opérateur tel que

– $T \in \mathcal{L}(L^{p_0}, L^{q_0})$ de norme M_0,

– $T \in \mathcal{L}(L^{p_1}, L^{q_1})$ de norme M_1.

On veut montrer que T se prolonge en un opérateur de $\mathcal{L}(L^p, L^q)$ de norme $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$, où p, q, θ sont tels que $0 < \theta < 1$ et $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ et $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

1. Soit $f, g \in \mathcal{D}$ tels que $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^{q'}} = 1$. Pour $O \leq \Re(z) \leq 1$ on pose $\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$ et $\frac{1}{q'(z)} = \frac{1-z}{q_0'} + \frac{z}{q_1'}$. On pose alors

$$\phi(x,z) = |f(x)|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{f}{|f|}, \quad \psi(x,z) = |g(x)|^{\frac{q'}{q(z)}} \frac{g}{|g|}.$$

Montrer que $F(z) =< T\phi(z), \psi(z) >$ est analytique dans $0 < \Re(z) < 1$ et continue et bornée sur $0 \leq \ Re(z) \leq 1$ et que l'on a

$$|F(it)| \leq M_0, \quad |F(1+it)| \leq M_1.$$

2. Montrer $|F(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

Indication : On pourra considérer les fonctions $F_\epsilon(z) = e^{\epsilon z^2 + \lambda z} F(z)$, et utiliser le principe du maximun.

3. Conclure

Applications du théorème de Riesz-Thorin

4. Inégalité de Young. Soit $f \in L$, $g \in L^q$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Montrer que $f * g \in L^r$ où r est tel que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

5. Inégalité de Haussdorff-Young. Soit $1 \leq p \leq 2$. Montrer que l'on peut prolonger la transformée de Fourier en une appliation $\mathcal{F} : L^p \mapsto L^{p'}$.

6. Montrer que l'on peut résoudre l'équation de Scrödinger (1) pour $u_0 \in L^p$ avec $1 \leq p \leq 2$ et que pour $t > 0$ on a

$$\|u(t)\|_{L^{p'}} \leq \frac{C}{|t|^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})}} \|u_0\|_{L^p}.$$

⋆