Td n° 8 d'Analyse fonctionnelle

Autour du Laplacien

Séance du 11 avril 2014

Exercice 1. *Préliminaires*

Soit $u \in H^1(\Omega)$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 telle que $f(0) = 0$ et f' soit bornée. Montrer que $f(u) \in H^1(\Omega)$ et que $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$.

2. Montrer que $u^+ = \max\{u, 0\} \in H^1$ et que $\nabla u^+ = \mathbb{1}_{u>0}\nabla u$.

⋆

Exercice 2. *Régularité elliptique*

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^d$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ solution faible de

$$-\Delta u + u = f.$$

1. On se place dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$. Pour $h \in \mathbb{R}^d$ et $v \in H^1$ on pose

$$D_h v = \frac{\tau_h v - v}{h}.$$

En prenant comme fonction test $D_{-h}(D_h u)$ montrer que

$$\|D_h \nabla u\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}.$$

2. En déduire que $\nabla u \in H^1$ et

$$\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}.$$

3. Etendre ce résultat au cas où $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1}$.

Remarque : En prenant des cartes locales, on peut montrer que ce résultat est aussi vrai pour Ω ouvert régulier borné. De plus, si $f \in H^m(\Omega)$, alors

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m}.$$

⋆

Exercice 3. *Première valeur propre du laplacien*

Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$. Étant donné $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta u = f$. On note $(-\Delta)^{-1}(f) = u$.

1. Montrer qu'il existe donc une suite croissante $\lambda_n \to \infty$ et une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, notée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n.$$

2. Montrer que $e_n \in \mathcal{C}^\infty$.

3. Montrer que $\sqrt{\lambda_1} = \inf_{u \in H_0^1, \|u\|_{L^2}=1} \|\nabla u\|_{L^2}$ est la constante optimale dans l'inégalité de Poincaré, et que cet optimum est réalisé uniquement sur l'espace propre E_{λ_1} associé à λ_1.

4. Si $f \in E_{\lambda_1}$, montrer que $|f| \in E_{\lambda_1}$. En déduire que $|f|$ est sous-harmonique.

5. Montrer que si $g \in C^\infty$ est sous-harmonique alors pour tous x et r tels que $B(x,r) \subset \Omega$

$$\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(x,r)} g(y)dy \leq g(x).$$

Indication : On pourra calculer $\int_{B(x,r)} (|y|^2 - r^2)\Delta f dy$.

6. En déduire que E_{λ_1} est de dimension 1 (engendré par e_1).

7. En déduire e_1 ne change pas de signe, et que si $\Omega = B(0,1)$ $(d \geq 2)$, e_1 est à symétrie sphérique.

8. Principe du minimax : montrer que

$$\lambda_n = \min_{\substack{V \subset H_0^1, \\ \dim(v) \geq n}} \max_{\substack{u \in V, \\ \|u\|_{L^2}=1}} \|\nabla u\|^2.$$

9. En déduire que si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ sont deux ouverts connexe bornés, $\lambda_n(\Omega_2) \leq \lambda_n(\Omega_1)$.

⋆

Exercice 4. *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne (e_n) de H telle que $\sum_n \|Te_n\|^2 < \infty$.

1. Soit (f_p) une base hilbertienne de H. Montrer que

$$\sum_p \|T^* f_p\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2.$$

En déduire que pour toute base hibertienne $(\tilde{e}_m)$ de H,

$$\sum_m \|T\tilde{e}_m\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2.$$

On note cette quantité $\|T\|_{HS}^2$.

2. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est compact. Que dire de la réciproque ?

3. On suppose que $H = L^2(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $L^2(\Omega \times \Omega)$. On définit

$$(T_K f)(x) = \int K(x,y) f(y) dy.$$

Montrer que pour toute base hilbertienne (e_n) de $L^2(\Omega)$ on a

$$\|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}^2 = \sum_n \|T_K e_n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

4. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\Omega)$ s'écrit de manière unique sous la forme T_K.

⋆