Analyse fonctionnelle
TD n° 8

Spectre — Opérateurs de Fredholm

Séance du 20 mars 2017

Exercice 1. *Échauffement*

Soit H un espace de Hilbert, et $\mathcal{I}$ un idéal bilatère de $\mathcal{L}(H)$, que l'on suppose fermé en norme et non réduit à $\{0\}$. Montrer que $\mathcal{I}$ contient les opérateurs compacts.

⋆

Exercice 2. *Algèbre de Calkin*

Soit H un espace de Hilbert (sur $\mathbb{C}$). On appelle *algèbre de Calkin* et on note $\mathcal{C}$ le quotient de $\mathcal{L}(H)$ par $\mathcal{K}(H)$, l'idéal formé par l'ensemble des opérateurs compacts sur H. On munit $\mathcal{C}$ de la norme quotient $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$, et on note $\pi : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{C}$ la projection canonique.

1. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$,

$$\|\pi(T)\|_{\mathcal{C}} = \inf\left\{\|T|_G\| \mid G \subseteq H,\ \operatorname{codim} G < +\infty\right\}.$$

2. Montrer que $\pi(T)$ est inversible dans $\mathcal{C}$ si et seulement si T est un opérateur de Fredholm.

3. En déduire que pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T - \lambda\,\mathrm{id}_H$ n'est pas un opérateur de Fredholm.

⋆

Exercice 3. *Stabilité du spectre par perturbation compacte*

Soit X un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(X)$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ un élément du spectre de A, qui n'est pas une valeur propre. Montrer que, pour tout opérateur compact $K \in K(X)$, λ est dans le spectre de $A + K$.

⋆

Exercice 4. *Calculs de spectre*

1. Considérons l'opérateur suivant :

$$T : \begin{cases} \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^1(\mathbb{N}), \\ (u_0, u_1, \ldots) \longmapsto (u_1, u_2, \ldots). \end{cases}$$

Déterminer le spectre de T. Les opérateurs T et T^* ont-ils même spectre ? Mêmes valeurs propres ?

2. On note E l'espace de Banach des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$. On définit sur E l'opérateur $T : E \to E$, $f \mapsto T(f)$, avec $T(f)(x) = f(x+1)$. Déterminer le spectre de T.

Indication : On pourra commencer par étudier les valeurs propres de T, puis remarquer que T est inversible.

⋆

Exercice 5. *Opérateurs de Toeplitz sur le cercle*

On se place dans l'espace $L^2(\mathbb{T})$, l'espace de Hilbert des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques, de carré intégrable sur une période. Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $k \in \mathbb{Z}$, son k-ième coefficient de Fourier est donné par $c_k(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$. On rappelle que l'application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, $f \mapsto \{c_k(f)\}$ définit un isomorphisme isométrique entre espaces de Hilbert.

Définition 1. — *On appelle* espace de Hardy*, et on note $H^2(\mathbb{T})$ le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{T})$ défini par*

$$H^2(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) \ \middle|\ c_k(f) = 0,\ \forall k < 0 \right\}.$$

On note $\Pi : L^2 \to H^2$ le projecteur (continu) sur cet espace.

— *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ une fonction continue. On note $M_f : L^2 \to L^2$ l'opérateur de multiplication par f.*

— *On appelle* opérateur de Toeplitz *de symbole f, et on note T_f, l'opérateur $T_f := \Pi \circ M_f$, défini de H^2 dans H^2.*

Le but de l'exercice est de voir à quelle condition les opérateurs de Toeplitz sont de Fredholm, et de calculer leur indice en fonction de f.

1. Montrer que M_f est continue, avec $\|M_f\| = \|f\|_{L^\infty}$.

2. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n(x) := e^{inx}$. Montrer que $[\Pi, M_{e_n}] := \Pi M_{e_n} - M_{e_n}\Pi$ est de rang fini sur $L^2(\mathbb{T})$. En déduire que $[\Pi, M_f]$ est un opérateur compact sur $L^2(\mathbb{T})$.

3. Montrer que, pour f, $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, l'opérateur $T_{fg} - T_f T_g$ est compact.

Pour $\alpha \in \mathbb{T}$, on note ρ_α la rotation d'angle α dans L^2, définie par $\rho_\alpha(f)(x) = f(x-\alpha)$, pour $f \in L^2(\mathbb{T})$.

4. Montrer que $\rho_\alpha \circ \Pi = \Pi \circ \rho_\alpha$, et en déduire que ρ_α induit un opérateur sur H^2.

5. Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ une fonction qui s'annule identiquement sur un ouvert $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{T}$.

(i) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{T}$, et un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\rho_\alpha \circ M_g)^n \equiv 0$.

(ii) En déduire que $(\rho_\alpha \circ T_g)^n$ est compact.

(iii) Conclure que T_g n'est pas un opérateur de Fredholm sur H^2.

6. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ telle que $\exists \theta_0 \in \mathbb{T}$ tel que $f(\theta_0) = 0$. En utilisant la question précédente, ainsi que l'ouverture de l'ensemble des opérateurs de Fredholm, montrer que T_f n'est pas de Fredholm.

7. Montrer que T_f est de Fredholm si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$.

On va maintenant calculer $\mathrm{ind}(T_f)$. Soit donc $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ qui ne s'annule pas.

8. Montrer qu'il existe deux fonctions r, $\theta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f = re^{i\theta}$, et montrer que $\mathrm{ind}(T_f) = \mathrm{ind}(T_{e^{i\theta}})$.

9. On note $k = \theta(2\pi) - \theta(0)$. Construire une homotopie d'opérateurs de Fredholm reliant $T_{e^{i\theta}}$ à T_{e_k}, et conclure.

10. En déduire qu'en particulier, si f est dérivable, alors

$$\mathrm{ind}(T_f) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)}{f(x)}dx.$$

$\star$