Analyse fonctionnelle
TD n° 8

Distributions : singularités et régularisation

Séance du 25 mars 2019

Exercice 1. *Échauffement*

Montrer que $\delta_0' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ n'est pas une mesure.

⋆

Exercice 2. *Distributions régulières*

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que T' s'identifie à une fonction f continue. Montrer que T s'identifie à une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et que $g' = f$.

2. Soient $a \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, tels que l'on ait, au sens des distributions, $u' + au = f$. Montrer que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, et que l'équation précédente est satisfaite au sens classique.

3. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $1 < p < \infty$. On suppose que

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|\langle T, \varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{L^p}} < +\infty.$$

Montrer que T s'identifie à une fonction de $L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

4. Soit $T \in \mathcal{D}'(]0,1[)$ telle que T' s'identifie à une fonction $f \in L^2(]0,1[)$. Montrer que T s'identifie à une fonction $u \in L^2(]0,1[)$, et en déduire que $u \in \mathcal{C}^0([0,1])$.

⋆

Exercice 3. *Fonctions lipschitziennes*

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrer l'équivalence :

(i) f est lipschitzienne, *i.e.* : $\exists C > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, $|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|$;

(ii) les dérivées partielles de f (au sens des distributions) vérifient $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \forall j \in [\![1, d]\!]$.

⋆

Exercice 4. *Pseudo monômes*

Dans cet exercice, les fonctions et distributions seront définies sur $\mathbb{R}$. On note $x_+ = \max(x, 0)$. On souhaite définir la partie finie de x_+^α, notée $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$.

1. À quelle condition $x \mapsto x_+^\alpha \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$? Dans ce cas, on note également $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ cette distribution.

2. Pour $-2 < \alpha < -1$, montrer que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi(x)\, dx = A\varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon,$$

où A dépend de φ, mais pas de ε et où R_ε possède une limite lorsque $\varepsilon \to 0$, que l'on exprimera en fonction de φ. Cette limite est notée $\langle \mathrm{pf}(x_+^\alpha), \varphi\rangle$. Montrer qu'alors $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ est une distribution d'ordre 1.

3. Pour $\alpha < -2$, $\alpha \notin -\mathbb{N}$, soit m la partie entière de $-\alpha$. Montrer de même que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi(x)\, dx = \sum_{k=0}^{m-1} A_k \varepsilon^{k+1+\alpha} + R_\varepsilon,$$

où les A_k dépendent de φ mais pas de ε, et où R_ε possède une limite lorsque $\varepsilon \to 0$, que l'on exprimera en fonction de φ, et qui est notée $\langle \mathrm{pf}(x_+^\alpha), \varphi \rangle$. Montrer que $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ est alors une distribution.

4. La distribution $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ étant ainsi déterminée pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$, calculer sa dérivée et son ordre.

5. Montrer que pour tout $\alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$, $\lim_{\alpha \to \alpha_0} \mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ existe, et vaut $\mathrm{pf}(x_+^{\alpha_0})$.

6. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\langle \mathrm{pf}(x_+^{-m}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} x^{-m} \varphi(x) dx + \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\varphi^{(k)}(0) \varepsilon^{k+1-m}}{k!(k+1-m)} + \frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} \ln \varepsilon \right).$$

Vérifier qu'il s'agit d'une distribution. Quelle en est la dérivée ? Quel est son ordre ? Est-elle limite d'une suite de distributions $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$, $\alpha \notin -\mathbb{N}$?

⋆

Exercice 5. *Représentation d'une distribution*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $K \subset \Omega$ compact et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On souhaite montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et un multi-indice α tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega), \ \langle T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) (\partial^\alpha \varphi)(x) dx.$$

1. Sans perte de généralité, on peut supposer que K est inclus dans un cube Q de longueur a. On définit l'opérateur $L = \partial_{x_1} \partial_{x_2} \cdots \partial_{x_d}$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $C_m > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_Q^\infty(\Omega), \quad \|\varphi\|_m \leq C_m \max_{x \in Q} |(L^m \varphi)(x)| \leq C_m \int_Q |(L^{m+1} \varphi)(x)| dx.$$

2. Expliquer pourquoi pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut définir une forme linéaire $\tilde{T}_m$ sur $X = L^{m+1}(\mathcal{C}_K^\infty(\Omega))$ par : $\forall \varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega), \quad \langle \tilde{T}_m, L^{m+1} \varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle$.

Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que :

$$\forall \psi \in X, \quad |\langle \tilde{T}_m, \psi \rangle| \leq C \int_K |\psi(x)| dx.$$

3. Conclure en utilisant le théorème de Hahn-Banach et la dualité $L^1(K)$ - $L^\infty(K)$.

4. On suppose que T est à support K compact : T est donc d'ordre fini m. Étant donné un ouvert V tel que $K \subset V \subset \Omega$, montrer que pour tout multi-indice α tel que $\forall i \in [\![1, d]\!]$, $\alpha_i \leq m+2$, il existe une fonction continue f_α , à support dans V, de sorte que :

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d ; \ \forall i \in [\![1,d]\!], \alpha_i \leq m+2} \partial^\alpha f_\alpha.$$

5. En déduire, grace à une partition de l'unité, que pour $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ quelconque, il existe des fonctions continues f_α, $\alpha \in \mathbb{N}^d$, telles que :

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \partial^\alpha f_\alpha,$$

et tout compact $K \subset \Omega$ n'intersecte qu'un nombre fini de supports $\mathrm{supp}(f_\alpha)$.

Montrer de plus que si T est d'ordre fini, les f_α peuvent être choisi tous nuls sauf un nombre fini.

⋆