Corrigé – TD 8

Espaces $\mathbb{L}^p$

Exercice 1 (Petites questions)**.**

1. Donner un exemple de $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que $f \notin \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour tout $p > 1$, et un exemple de $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec $p > 1$ telle que $f \notin \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu)$ qui converge dans $\mathbb{L}^p$ vers f et qui converge également μ-p.p. vers g. Montrer que $g \in \mathbb{L}^p$ et que $f = g$ μ-p.p.

3. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu) \cap \mathbb{L}^q(E, \mathscr{E}, \mu)$ avec $p, q \in [1, +\infty]$ et $p \neq q$. On suppose que $f_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^p$ quand $n \to \infty$ et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$. Montrer que $f_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^q$ quand $n \to \infty$.

Corrigé :

1. Pour le premier exemple, on peut prendre $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^2} \mathbf{1}_{]0,1/2[}$. Pour le deuxième exemple, on peut prendre $f(x) = \frac{1}{1+x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$.

2. On utilise Fatou pour prouver que $g \in \mathbb{L}^p$. Comme $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^p$ quand $n \to \infty$, on peut extraire de $(f_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que $f_{n_k} \to f$ μ-p.p. quand $k \to \infty$. Mais $f_{n_k} \to g$ μ-p.p., donc $f = g$ μ-p.p.

3. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$ donc il existe une fonction $f \in \mathbb{L}^q$ telle que $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^q$ quand $n \to \infty$. On peut extraire de $(f_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que $f_{n_k} \to f$ μ-p.p. quand $k \to \infty$. Par ailleurs $f_{n_k} \to 0$ dans $\mathbb{L}^p$ quand $k \to \infty$. Donc on peut en extraire une sous-suite $(f_{n_{k_j}})_{j\geq 0}$ telle que $f_{n_{k_j}} \to 0$ μ-p.p. quand $j \to \infty$. On en déduit donc que $f = 0$ μ-p.p.

Exercice 2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{L}^p(\Omega)$ est séparable pour tout $p \in [1, \infty[$.

Corrigé : Soit E l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'indicatrices de pavés de la forme $\prod_{i=1}^n]x_i, y_i[$ inclus dans Ω et avec les x_i, y_i à coordonnées rationnelles. Par construction E est dénombrable, il nous suffit donc de montrer que E est dense dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$. Soit $f \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$, on commence par choisir $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ telle que $\|f - g\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \leq \varepsilon/2$. Soit ω un ouvert borné contenant $\mathrm{supp}(g)$, en utilisant l'uniforme continuité de g, on construit facilement $h \in E$ telle que $\mathrm{supp}(h) \subset \omega$ et $\|g - h\|_{\mathbb{L}^\infty(\omega)} \leq \varepsilon/(2|\omega|^{1/p})$, de sorte que l'on a $\|g - h\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \leq \varepsilon/2$ et donc aussi $\|f - h\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \leq \varepsilon$.

Exercice 3. Montrer que l'espace de suites bornées $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.

Corrigé : Pour toute partie J de $\mathbb{N}$ non-vide, $\|\mathbf{1}_J\|_\infty = 1$. On note

$$B_J = \{u \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \colon \|u - \mathbf{1}_J\|_\infty < 1/2\},$$

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à shen.lin@ens.fr, ou bien à passer au bureau V7.

qui est la boule ouverte centrée en $\mathbf{1}_J$ de rayon $1/2$. Si J et J' sont deux parties distinctes de $\mathbb{N}$, $B_j \cap B_{J'} = \emptyset$. S'il existait une suite $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ dense dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$, chaque boule ouverte $B_J, J \subset \mathbb{N}$ contiendrait au moins un terme $u^{p(J)}$ de cette suite. Comme ces boules sont deux-à-deux disjointes, on aurait $p(J) \neq p(J')$ dès que $J \neq J'$. On obtiendrait ainsi une injection de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}$, ce qui est impossible d'après Cantor.

RAPPEL (*Théorème d'Egoroff* – TD 3, Exercice 6).
Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$, et soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables sur E qui converge μ-p.p. vers une fonction f. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A_\varepsilon \in \mathscr{E}$ de mesure $\mu(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ tel que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $E \setminus A_\varepsilon$.

Exercice 4. Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ bornée de $\mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu)$, $p \in]1, \infty[$ et une fonction mesurable f sur $(E, \mathscr{E}, \mu)$ telles que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu)$.
2. Montrer que $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^r$ quand $n \to \infty$ pour tout $r \in [1, p[$.
3. Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

Corrigé : *Cas* $p < \infty$:

1. D'après le lemme de Fatou on a
$$\int_E |f|^p \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n|^p \, d\mu \leq \sup_{n\geq 0} \|f_n\|_p^p < \infty,$$
et donc $f \in \mathbb{L}^p$.

2. On fixe $r \in [1, p[$, $\varepsilon > 0$ et un ensemble A_ε donné par le théorème d'Egoroff. Soit $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a
$$\sup_{x\in E\setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
Alors pour tout $n \geq n_0$ on a d'après l'inégalité de Hölder et celle de Minkowski que
$$\begin{aligned}
\int_E |f_n - f|^r \, d\mu &= \int_{E\setminus A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu + \int_{A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu \\
&\leq \varepsilon^r \mu(E) + \varepsilon^{1-r/p} \left(\int_E |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{r/p} \\
&\leq \varepsilon^r \mu(E) + \varepsilon^{1-r/p} \Big(\|f\|_p + \sup_{n\geq 0} \|f_n\|_p \Big)^r.
\end{aligned}$$

Cas $p = \infty$:

1. On a l'existence d'une constante $M < \infty$ telle que $\mu(|f_n| > M) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Or
$$\{|f| > M\} \subset \bigcup_{n\geq 0} \{|f_n| > M\}.$$
Donc $\mu(|f| > M) = 0$ et $f \in \mathbb{L}^\infty$.

2. On fixe $r \in [1, +\infty[$, $\varepsilon > 0$ et un ensemble A_ε donné par le théorème d'Egoroff. Soit $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\sup_{x \in E \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Alors pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\begin{aligned} \int_E |f_n - f|^r \, d\mu &= \int_{E \setminus A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu + \int_{A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu \\ &\leq \varepsilon^r \mu(E) + \varepsilon (2M)^r. \end{aligned}$$

Exercice 5 (Théorème de Lusin, version plus faible)**.** Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K_\varepsilon \subset [a, b]$ tel que $\lambda([a, b] \cap K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$ et f soit continue sur K_ε.

INDICATION : on pourra utiliser le théorème d'Egoroff et le fait que les fonctions continues sur $[a, b]$ sont denses dans $\mathbb{L}^1([a, b])$.

Corrigé : Comme f est finie, il existe $n \geq 1$ tel que $\lambda(\{|f| \geq n\}) < \varepsilon$. Par régularité extérieure de la mesure de Lebesgue, il existe un ouvert O_ε tel que $\{|f| \geq n\} \subset O_\varepsilon$ et $\lambda(O_\varepsilon) < 2\varepsilon$. La fonction $g = f \mathbf{1}_{O_\varepsilon^c}$ est bornée, donc dans $\mathbb{L}^1([a, b])$. Il existe ainsi une suite de fonctions continues f_n telles que $f_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} g$. On peut alors extraire une sous-suite $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda\text{-p.p.}} g$. D'après le théorème d'Egoroff, il existe un ensemble mesurable A_ε tel que $\lambda(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et la convergence $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda\text{-p.p.}} g$ soit uniforme sur $[a, b] \setminus A_\varepsilon$. Par régularité extérieure de la mesure de Lebesgue, il existe un ouvert O'_ε tel que $A_\varepsilon \subset O'_\varepsilon$ et $\lambda(O'_\varepsilon) < 2\varepsilon$. De plus, la convergence $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda\text{-p.p.}} g$ est uniforme sur $[a, b] \setminus O'_\varepsilon$. Les fonctions f_n étant continues, il s'ensuit que g est continue sur $[a, b] \setminus O'_\varepsilon$. Posons finalement $K_\varepsilon = [a, b] \setminus (O'_\varepsilon \cup O_\varepsilon)$. Ainsi, la fonction f est continue sur K_ε, et on a $\lambda([a, b] \cap K_\varepsilon^c) \leq 4\varepsilon$, ce qui conclut.

Remarque. Dans le TD 6, on a montré le résultat plus fort suivant : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lambda(\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}) \leq \varepsilon.$$

Exercice 6 (Lemme de Scheffé)**.** Soient $p \in [1, \infty[$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu)$ qui converge μ-p.p. vers une fonction f de $\mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\lim_{n \to \infty} ||f_n - f||_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} ||f_n||_p = ||f||_p.$$

INDICATION : appliquer le lemme de Fatou à $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$.

Corrigé : L'implication est toujours vérifiée (même sans convergeance μ-p.p.) car

$$\big| ||f_n||_p - ||f||_p \big| \leq ||f_n - f||_p.$$

Pour la réciproque, comme suggéré, introduisons $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$, qui est une fonction positive convergeant μ-p.p. vers $2^{p+1}|f|^p$. Le lemme de Fatou fournit:

$$2^{p+1} \int |f|^p \, d\mu = \int (\liminf_{n \to \infty} g_n) \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int g_n \, d\mu.$$

Or

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu &= 2^p \liminf_{n\to\infty} \int (|f_n|^p + |f|^p) \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu \\
&= 2^{p+1} \int |f|^p \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé pour la dernière égalité le fait que $||f_n||_p \to ||f||_p$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu \leq 0,$$

ce qui conclut.

Remarque : Si l'on oublie l'hypothèse de convergence μ-p.p., la réciproque est fausse (trouvez un contre-exemple !).

Exercice 7. Soit f une fonction mesurable sur $(E, \mathscr{E}, \mu)$, avec $\|f\|_\infty > 0$. Pour $0 < p < +\infty$, on pose

$$\varphi(p) := \int_E |f|^p d\mu, \quad \text{et} \quad I := \left\{p \in \mathbb{R}_+^* \colon \varphi(p) < \infty\right\}.$$

1. Montrer que I est un intervalle. Est-il fermé ? ouvert ?

2. Montrer que $\ln \circ \varphi$ est convexe sur I et que φ est continue sur I.

Corrigé :

1. Soient $a, b \in I$, $a < b$ et $t \in]0,1[$. On pose $\frac{1}{p} = t$ et $\frac{1}{q} = (1-t)$, l'inégalité de Hölder donne

$$\left(\int_E |f|^{ta+(1-t)b} d\mu\right) \leq \left(\int_E |f|^a d\mu\right)^t \left(\int_E |f|^b d\mu\right)^{1-t}, \tag{1}$$

ce qui montre donc que I est un intervalle. En considérant les fonctions $x \mapsto x^{-1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)^2}$ sur $[2, +\infty]$ muni de la mesure de Lebesgue, on voit que I n'est pas nécéssairement fermé ou ouvert.

2. En passant au logarithme dans l'inégalité (1) on obtient que $\ln \circ \varphi$ est convexe sur l'intérieur de l'intervalle $\mathring{I}$, donc en particulier φ est convexe sur $\mathring{I}$, elle y est continue. Si $a = \min I$ et (a_n) une suite décroissante vers a alors

$$|f|^{a_n} \leq \mathbf{1}_{\{|f|\geq 1\}} |f|^{a_0} + \mathbf{1}_{\{|f|\leq 1\}} |f|^a,$$

et $|f|^{a_n} \overset{\mu-\text{p.p.}}{\longrightarrow} |f|^a$. Le théorème de convergence dominée permet donc de conclure que φ est continue en a.

Exercice 8 (Continuité de l'opérateur de translation)**.**
Soient $h \in \mathbb{R}$ et $f \colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On définit $\tau_h f$ par

$$\tau_h f(x) = f(x-h), \;\; x \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que l'opérateur de translation τ_h est une isométrie de l'espace $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $p \in [1, +\infty]$.

2. On suppose $p < \infty$. Montrer que si $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ alors,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p &= 0, \\ \lim_{|h| \to +\infty} \|\tau_h f - f\|_p &= 2^{1/p} \|f\|_p \,. \end{aligned}$$

   INDICATION : on pourra traiter tout d'abord le cas où f est continue à support compact.

3. Que deviennent les résultats de la question 2 si $p = \infty$?

4. ($\star$) Déduire des questions précédentes que si $\lambda(A) > 0$, alors l'ensemble $A - A = \{x - y \colon x \in A, y \in A\}$ contient un voisinage de 0. (Deuxième démonstration de l'année)

Corrigé :

1. Pour $p = \infty$ c'est clair, et pour $p < \infty$ ceci provient du fait que l'image de la mesure de Lebesgue par l'application $x \mapsto x - h$ est elle-même pour tout $h > 0$.

2. Soit f une fonction continue à support compact. La fonction f est donc uniformément continue. Soient $a < b$ deux réels tels que le segment $[a, b]$ contient le support de f. On a, pour tout $|h| < 1$,

$$\|\tau_h f - f\|_p^p \leq (b - a + 2) \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + h) - f(x)|^p,$$

   et $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + h) - f(x)|^p \to 0$ quand $h \to 0$. (Une autre possibilité est d'utiliser le théorème de convergence dominée.)

   Soit h tel que $|h| > b - a$. Alors les supports de $\tau_h f$ et f sont disjoints. On a donc

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_p^p &= \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, dx \\ &= \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, \mathbf{1}_{\{x \in \mathrm{supp}(f)\}} \, dx + \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, \mathbf{1}_{\{x \in \mathrm{supp}(\tau_h f)\}} \, dx \\ &= \|f\|_p^p + \|\tau_h f\|_p^p = 2 \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

   Soient maintenant $f \in \mathbb{L}^p$ et $\varepsilon > 0$. On peut trouver une fonction g continue à support compact telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $h \geq 0$,

$$\|\tau_h g - g\|_p - \|\tau_h g - \tau_h f\|_p - \|g - f\|_p \leq \|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h g - g\|_p + \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|g - f\|_p,$$

   c'est-à-dire

$$-2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p \leq \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p.$$

   Ainsi, on a

$$\limsup_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon,$$

   et

$$2^{1/p} \|f\|_p - (2 + 2^{1/p})\varepsilon \leq \liminf_{|h| \to \infty} \|\tau_h f - f\|_p \leq \limsup_{|h| \to \infty} \|\tau_h f - f\|_p \leq (2 + 2^{1/p})\varepsilon + 2^{1/p} \|f\|_p.$$

   Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit les deux limites.

3. Dans le cas où $p = +\infty$, les résultats ne sont plus vrais. En effet, en posant $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$, on a $\|\tau_h f - f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}$ donc $\|\tau_h f - f\|_\infty \nrightarrow 0$ quand $h \to 0$. De même en posant $g = \mathbf{1}_\mathbb{R}$ on a $\|\tau_h g - g\|_\infty = 0$ et donc $\|\tau_h g - g\|_\infty \nrightarrow 2^{1/p}$ quand $|h| \to \infty$.

4. Notons $A_n = A \cap B(0, n)$. Alors $\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$. Il existe donc $n \geq 0$ tel que $\lambda(A_n) > 0$. On peut donc supposer que A est borné, de mesure strictement positive, de sorte que $f = \mathbf{1}_A$ est dans $\mathbb{L}^1$. On a

$$\tau_h f - f = \mathbf{1}_{A\Delta(A+h)},$$

où Δ désigne la différence symétrique. Donc

$$\|\mathbf{1}_{A\Delta(A+h)}\|_1 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{i.e.} \quad \lambda(\mathrm{A}\Delta(\mathrm{A}+\mathrm{h})) \underset{\mathrm{h}\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, $\lambda(A \cap (A+h)^c) \to 0$ donc $\lambda(A \cap (A+h)) \to \lambda(A)$. On peut donc trouver h_0 tel que $\lambda(A \cap (A+h)) > 0$ pour tout $h \leq h_0$. En particulier, $A \cap (A+h) \neq \varnothing$. Donc il existe $x, y \in A$ tels que $x = y + h$. On a donc montré que $]-h_0, h_0[\subset A - A$.

Exercice 9 (Inégalité de Hardy)**.** Soient $(X, \mathscr{X}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. On considère $\varphi\colon (X \times Y, \mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable et intégrable par rapport à la mesure produit $\mu \otimes \nu$, et F la fonction définie pour μ-p.p. $x \in X$ par $F(x) = \displaystyle\int_Y \varphi(x, y)\nu(dy)$.

1. Soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que F vérifie l'inégalité $\|F\|_p \leq \displaystyle\int_Y \|\varphi(\cdot, y)\|_p\, \nu(dy)$.

2. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ avec $p \in]1, \infty[$, la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ vérifie l'inégalité suivante (appelée *inégalité de Hardy*)

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p\,.$$

Corrigé :

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1} \in \mathscr{X}^\mathbb{N}$ une suite croissante telle que $X = \cup_{n\geq 1} X_n$ et telle que $\mu(X_n) < \infty$ pour tout $n \geq 1$. On note $A_n = X_n \cap \{|F| \leq n\}$. On a

$$\begin{aligned}
\int_X |F(x)|^p \mathbf{1}_{A_n}\mu(dx) &\leq \int_X |F(x)|^{p-1}\left(\int_Y |\varphi(x,y)|\nu(dy)\right)\mathbf{1}_{A_n}\mu(dx) \\
&= \int_Y \nu(dy)\left(\int_X |F(x)|^{p-1}|\varphi(x,y)|\mathbf{1}_{A_n}\mu(dx)\right) && \text{(Fubini-Tonelli)} \\
&\leq \int_Y \nu(dy)\left(\int_X |F(x)|^p \mathbf{1}_{A_n}\mu(dx)\right)^{1-\frac{1}{p}} \|\varphi(\cdot,y)\|_p && \text{(Hölder).}
\end{aligned}$$

Or $\int_X |F(x)|^p \mathbf{1}_{A_n}\mu(dx) < \infty$. On en déduit que (on voit ici l'intérêt d'introduire A_n, sinon on n'aurait pas pu diviser par une quantitié pouvant être infinie)

$$\left(\int_X |F(x)|^p \mathbf{1}_{A_n}\mu(dx)\right)^{1/p} \leq \int_Y \nu(dy)\|\varphi(\cdot,y)\|_p.$$

Mais la suite de fonctions $(\mathbf{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ tend simplement en croissant vers la fonction constante égale à 1. D'après le théorème de convergence monotone, il vient

$$\left(\int_X |F(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} \leq \int_Y \nu(dy)\|\varphi(\cdot,y)\|_p.$$

2. On remarque que

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(xy)dy.$$

Il est tentant de prendre $\varphi(x,y) = f(xy)$, mais cette fonction n'est pas nécessairement intégrable. On procède donc par approximation comme à la question précédente. Plus précisément, on applique la question 1 aux fonctions

$$\varphi_n(x,y) = \mathbf{1}_{[1/n,n]}(x)|f(xy)|,$$

et $G_n)(x) = \int_{[0,1]} \varphi_n(x,y)dy$. Vérifions pour cela que chaque φ_n est intégrable. D'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives

$$\int_{\mathbb{R}_+^*\times[0,1]} \varphi_n(x,y)dxdy = \int_{1/n}^n \left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt\right)dx \leq \int_{1/n}^n \frac{dx}{x}\int_0^n |f(t)|dt < \infty.$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$\|G_n\|_p \leq \int_{[0,1]} \|\varphi_n(\cdot,y)\|_p dy,$$

et

$$\|\varphi_n(\cdot,y)\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}_+^*} |f(xy)|^p dx = \frac{1}{y}\|f\|_p^p.$$

On a donc

$$\|G_n\|_p \leq \|f\|_p \int_{[0,1]} \frac{1}{y^{1/p}}dy = \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Puis, par le théorème de convergence monotone, on en déduit que

$$\|G\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p,$$

où $G\colon x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt$. Enfin on remarque que $\|F\|_p \leq \|G\|_p$, ce qui conclut.

Exercice 10.

1. Soient $p \in [1,+\infty[$ et $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que F est bien définie et que si q est l'exposant conjugué de p, alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$

2. En déduire que si g est une fonction sur $\mathbb{R}_+$, intégrable et de classe C^1 telle que $g' \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ pour un $p \in [1,+\infty[$, alors $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Corrigé :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f \in \mathbb{L}^p([0,x]) \subset \mathbb{L}^1([0,x])$ donc F est bien définie. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a, d'après l'inégalité de Hölder,

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_E f \mathbf{1}_{[x,x+h]} \, d\lambda \right| \leq \left(\int_E |f|^p \mathbf{1}_{[x,x+h]} \, d\lambda \right)^{1/p} |h|^{1/q}.$$

Donc, en posant $G(x) = \int_0^x |f|^p \, d\lambda$, on a

$$\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|}{|h|^{1/q}} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} (|G(x+h) - G(x)|)^{1/p} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

car G est uniformément continue.

2. La fonction g est de classe C^1 donc $g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t) \, dt$. D'après la question 1,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x+h) - g(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \geq n$ tel que $g(x_n) > \varepsilon$. On peut trouver $h_0 \in]0,1[$ tel que pour tout $h \leq h_0$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x+h) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon |h|^{1/q}}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [x_n, x_n + h_0]$, on a $g(t) \geq \varepsilon/2$. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ peut-être choisie de sorte que les intervalles $[x_n, x_n + h_0]$ soient disjoints. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}_+} |g(t)| \, dt \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{x_n}^{x_n+h_0} |g(t)| \, dt \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon h_0}{2} = +\infty,$$

ce qui contredit l'intégrabilité de g.