PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 8
CHAÎNES DE MARKOV - PROPRIÉTÉ DE MARKOV FORTE -
CLASSIFICATION DES ÉTATS

Exercice 1 (Questions “simples” sur la classification des états)**.**
On notera génériquement $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de fonction de transition Q à valeurs dans un espace d'états dénombrable S. On notera $N_x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$.

1. Donner un exemple où l'ensemble des points visités par la chaîne issue de x n'est pas déterministe, i.e. constant p.s.
2. Donner un exemple où, sans que x soit récurrent, sous $\mathbb{P}_x$, l'ensemble des points visités par la chaîne est p.s. toujours le même. Donner un exemple où, de plus, l'ordre des 3 premiers points visités en partant de x n'est pas déterministe.
3. Pour $x, y \in S$, a-t-on : y récurrent et il existe n tel que $Q^n(x,y) > 0 \Rightarrow N_y = \infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. ?
4. Donner un exemple où il existe n tel que $Q^n(x,y) > 0$ mais pour tout p, $Q^p(y,x) = 0$.
5. Montrer que pour $x, y \in S$, $\mathbb{E}_x(N_y) = \infty \Rightarrow y$ récurrent. La réciproque est-elle vraie ?
6. Peut-on avoir $0 < \mathbb{E}_x(N_y) < \infty$, avec y récurrent ?
7. Si $\mathbb{E}_x(N_y) = \infty$, quelles valeurs peut prendre $\mathbb{E}_y(N_x)$?
8. On suppose que pour tout $x \in S$, l'ensemble $V_x = \{y \in S \,|\, \exists n \, t.q. \, Q^n(x,y) > 0\}$ est fini. Montrer qu'il existe des états récurrents.
9. On suppose qu'il existe un état $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $\sum Q^n(x_0,x) > 0$ et $\mathbb{P}_x(\tau_{x_0} < \infty) = 1$ avec τ_{x_0} le temps d'atteinte de x_0. Est-ce que la chaîne est récurrente ?

Correction : On notera génériquement $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de fonction de transition Q à valeurs dans un espace d'états dénombrable S. On notera $N_x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$.

1. On prend $S = \{-1, 0, 1\}$, $Q(1,1) = Q(-1,-1) = 1$ et $Q(0,1) = Q(0,-1) = 1/2$. Alors, sous $\mathbb{P}_0$, l'ensemble des points visités est $\{0,1\}$ avec probabilité $1/2$, et $\{0,-1\}$ avec probabilité $1/2$. On pourrait rendre cet exemple moins “déterministe” en prenant $S = \mathbb{Z}$, et Q vérifiant $Q(0,1) = Q(0,-1) = 1/2$, pour tout $x > 0$, $Q(x,\cdot)$ concentrée sur $\mathbb{N}^*$, et pour tout $x < 0$, $Q(x,\cdot)$ concentrée sur $-\mathbb{N}^*$.
2. Pour $S = \{0,1\}$ et $Q(0,1) = 1 = Q(1,1)$, on voit que $x = 0$ n'est pas récurrent, et l'ensemble des points visités par la chaîne est $\{0,1\}$ $\mathbb{P}_0$-p.s..

   Pour $S = \{0,1,2\}$ et $Q(i,1) = Q(i,2) = 1/2$ pour $i = 0,1,2$, on voit que $x = 0$ n'est pas récurrent, que l'ensemble des points visités est $\{0,1,2\}$ $\mathbb{P}_0$-p.s., et que le deuxième point visité est 1 ou 2 avec probabilité $1/2$.
3. La réponse est non. Il suffit de reprendre l'exemple de la question 1., on voit que 1 est récurrent, $Q(0,1) > 0$ mais $\mathbb{P}_0(N_1 = \infty) = 1/2$.
4. Toujours avec le même exemple, $Q(0,1) > 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Q^p(1,0) = 0$.

5. On a, par la propriété de Markov en $H_y = \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n = y\}$, en notant (Y_n) une autre chaîne de même fonction de transition et issue de x sous la loi $\mathcal{L}_x$ (d'espérance $\mathcal{E}_x$):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x(N_y) &= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{H_y<\infty}\sum_{n\geq H_y}\mathbb{1}_{X_n=y}\right)\\
&= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{H_y<\infty}\mathcal{E}_{X_{H_y}}(\sum_{n\geq 0}\mathbb{1}_{Y_n=y})\right)\\
&= \mathbb{P}_x(H_y<\infty)\mathcal{E}_y(\sum_{n\geq 0}\mathbb{1}_{Y_n=y})\\
&= \mathbb{P}_x(H_y<\infty)\mathbb{E}_y(N_y)\,,
\end{aligned}$$

donc si $\mathbb{E}_x(N_y) = \infty$, comme $\mathbb{P}_x(H_y < \infty)$ est borné, on a $\mathbb{E}_y(N_y) = \infty$, i.e. y est récurrent.

La réciproque est fausse, cf l'exemple 1. avec 1 récurrent, mais $Q^n(-1, 1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (1 et -1 sont récurrents, mais pas dans la même classe).

6. Non, car $\mathbb{E}_x(N_y) = \mathbb{P}_x(H_y < \infty)\mathbb{E}_y(N_y)$ (cf question 5.) et $\mathbb{E}_y(N_y) = \infty$, donc $\mathbb{E}_x(N_y) = 0$ ou ∞ selon que $\mathbb{P}_x(H_y < \infty) = 0$ ou > 0.

7. Si $\mathbb{E}_x(N_y) = \infty$, alors y est récurrent (cf 5.). On en déduit que $\mathbb{E}_y(N_x)$ ne peut prendre que 2 valeurs : $\mathbb{E}_y(N_x) = \infty$ si x est récurrent et dans la même classe que y, et $\mathbb{E}_y(N_x) = 0$ sinon.

8. Soit $x \in E$. Sous $\mathbb{P}_x$, la chaîne (de matrice de transition Q) reste p.s. dans V_x, donc sous $\mathbb{P}_x$,
$$\forall k \geq 0 \qquad \sum_{y\in V_x} Q^k(x,y) \;=\; 1\,,$$
donc
$$\sum_{y\in V_x}\sum_{k\geq 0} Q^k(x,y) \;=\; \sum_{k\geq 0}\sum_{y\in V_x} Q^k(x,y) \;=\; +\infty\,.$$
V_x étant fini, il existe $y \in V_x$ tel que $\mathbb{E}_x(N_y) = \sum_{k\geq 0} Q^k(x, y) = \infty$, ce qui implique (cf 5.) que y est récurrent.

9. Oui. Il suffit de voir que x_0 est récurrent ou encore que $\mathbb{P}_{x_0}(H_{x_0} < \infty) = 1$ où $H_{x_0} = \inf\{n \geq \mathbf{1} : X_n = x_0\}$ est le premier temps de retour strict en x_0. D'après la propriété de Markov appliquée au temps $n = 1$ on a
$$\mathbb{E}_{x_0}\left[\mathbf{1}_{H_{x_0}<\infty}\right] = \mathbb{E}_{x_0}\left[\mathcal{E}_{X_1}[\tau_{x_0}<\infty]\right] = 1.$$

Exercice 2 (Chaînes irréductibles)**.**
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace dénombrable S de fonction de transition Q. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible si et seulement si il n'existe pas de sous-ensemble strict non vide F de S tel que
$$\forall x \in F,\ \forall y \in F^c, \qquad Q(x,y) = 0\,.$$

Correction : • On suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible et que l'on peut trouver un sous-ensemble strict non vide F de S tel que

$$\forall x \in F,\ \forall y \in F^c, \qquad Q(x,y) = 0\,.$$

Soient $x \in F$ et $y \in F^c$. Par hypothèse $Q(x,y) = 0$ et puisque la chaîne est irréductible il existe $n \geq 2$ tel que $Q^n(x,y) > 0$, et donc une suite $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ d'éléments de S telle que $Q(x_i, x_{i+1}) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Soit

$$k \;=\; \max\{1 \leq i \leq n-1 \,|\, x_i \in F\}\,.$$

Alors, $x_k \in F$, $x_{k+1} \in F^c$ et $Q(x_k, x_{k+1}) > 0$ ce qui est impossible.
• On suppose que pour tout sous-ensemble strict non vide F de S, il existe $x \in F$, $y \in F^c$ tels que $Q(x,y) > 0$. Pour $x \in S$, on note $S_x = \{y \in E : \exists n \in \mathbb{N}\, t.q.\, Q^n(x,y) > 0\}$. On veut montrer que $S_x = S$. L'ensemble S_x est non vide car il contient x. Supposons que $S_x \subsetneq S$. Soient $a \in S_x$ et $b \in S_x^c$ tels que $Q(a,b) > 0$ (ils existent par hypothèse). On a $a \in S_x$ donc il existe $n \geq 0$ tel que $Q^n(x,a) > 0$, d'où

$$Q^{n+1}(x,b) \;\geq\; Q^n(x,a)Q(a,b) \;>\; 0\,.$$

Ceci est absurde car alors $b \in S_x$. Cela signifie que $S_x = S$ et ceci pour tout $x \in S$. La chaîne est donc irréductible.

Exercice 3.
Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ avec $k \neq 0$, montrer que l'espérance du nombre de visites de k avant le premier retour en 0 est 1.

Correction : Notons $N_x([0,\tau_0[)$ le nombre de passages en x avant le premier retour en 0. Tout d'abord, pour que le nombre de passages en x avant le premier retour en 0 soit k, il faut que la marche aille en x sans repasser par 0, puis de x revienne $(k-1)$ fois sur x toujours sans repasser par 0 et enfin en partant de x aille en 0 sans repasser par x, donc :

$$\mathbb{P}_0[N_x([0,\tau_0[) = k] = \mathbb{P}_0[\tau_x < \tau_0]\,(\mathbb{P}_x[\tau_x < \tau_0])^{k-1}\,\mathbb{P}_x[\tau_0 < \tau_x].$$

Il faut donc calculer ces trois quantités. Je suppose x positif. En partant de 0, si je veux aller à x, il faut que le premier pas soit vers $+1$, et ensuite en partant de 1, il faut que j'atteigne x avant de revenir en 0. La proba de choisir 1 en premier est $\frac{1}{2}$, et $\mathbb{P}_1[\tau_x < \tau_0] = \frac{1}{x}$, donc $\mathbb{P}_0[\tau_x < \tau_0] = \frac{1}{2x}$. Par symétrie, $\mathbb{P}_x[\tau_0 < \tau_x] = \frac{1}{2x}$ et $\mathbb{P}_x[\tau_x < \tau_0] = \left(1 - \frac{1}{2x}\right)$. L'espérance cherchée est :

$$\mathbb{E}_0[N_x([0,\tau_0[) = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{2x}\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{k-1}\frac{1}{2x} = 1.$$

Exercice 4.
Montrer que la marche aléatoire simple sur l'arbre binaire complet est transiente.

Correction : Il faut considérer la distance à l'origine. Je vous laisse vérifier que c'est une marche aléatoire biasée, qui tend donc vers $+\infty$.

Exercice 5 (Chaîne de naissance et de mort)**.**
Soit Q la fonction de transition sur $\mathbb{N}$ donnée par:

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $p_0 > 0$, $p_0 + r_0 = 1$, $p_i > 0$, $q_i > 0$ et $p_i + r_i + q_i = 1$ pour $i \geq 1$. Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction de transition Q.

1. Montrer que X est irréductible.

2. On suppose que
$$\sum_{i\geq 1} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} < \infty .$$
Montrer que X admet une mesure de probabilité réversible π qu'on déterminera. Que peut-on en déduire sur X ?

3. On considère le cas où $p_i = p > 0$ pour tout $i \geq 0$ et $q_i = q > 0$ pour tout $i \geq 1$ avec $p < q$. Calculer $\mathbb{E}_i(H_i)$ pour tout $i \geq 0$, où $H_i = H_i(X_0, X_1, ...) = \inf\{n \geq 1 \,:\, X_n = i\}$ désigne le premier temps de retour en i.

Correction :

1. Soient $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$. On remarque que
$$\begin{aligned} Q^{j-i}(i,j) &\geq Q(i,i+1)\dots Q(j-1,j) \;=\; p_i \dots p_{j-1} \;>\; 0 \;\text{ si }\; i<j \\ Q^{i-j}(i,j) &\geq Q(i,i-1)\dots Q(j+1,j) \;=\; q_i \dots q_{j+1} \;>\; 0 \;\text{ si }\; i>j \\ Q^2(i,i) &\geq Q(i,i+1)Q(i+1,i) \;=\; p_i q_{i+1} \;>\; 0\,, \end{aligned}$$
donc X est irréductible.

2. Soit π une mesure de probabilité. Elle est réversible ssi pour tout $i \in \mathbb{N}$,
$$\pi(i)p_i \;=\; \pi(i+1)q_{i+1}\,. \tag{1}$$
En effet cette condition est suffisante car si $j \neq i \pm 1$, la condition $\pi(i)Q(i,j) = \pi(j)Q(j,i)$ est triviale. La condition (1) est équivalente à : pour tout $i \in \mathbb{N}$,
$$\pi(i) \;=\; \pi(0) \times \frac{p_0 \dots p_{i-1}}{q_1 \dots q_i} \tag{2}$$
Il suffit donc de vérifier qu'il existe une mesure de probabilité qui satisfait (2). Or
$$C \;=\; \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{p_0 \dots p_{i-1}}{q_1 \dots q_i} \;\in\,]0, +\infty[$$

par hypothèse donc on peut poser $\pi(0) = C^{-1}$ pour obtenir $\sum_i \pi(i) = 1$. On en déduit que la mesure π définie par

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad \pi(i) = C^{-1}\frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i}$$

est bien une probabilité réversible pour la chaîne.

La mesure π étant réversible, elle est également invariante. Puisque la chaîne est irréductible et admet une probabilité invariante, on sait qu'elle est aussi récurrente positive.

Remarque : la probabilité invariante est alors unique.

3. Dans ce cas,
$$C \;=\; \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} \;=\; \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{p^i}{q^i} \;=\; \frac{q}{q-p}\,.$$
L'hypothèse de la question 2. est bien vérifiée, et la mesure de probabilité invariante est donnée par
$$\pi(i) \;=\; \frac{(q-p)p^i}{q^{i+1}}\,.$$
Or, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}_i(H_i) = \pi(i)^{-1}$ (cas d'une chaîne irréductible récurrente positive). Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}_i(H_i) \;=\; \frac{q^{i+1}}{(q-p)p^i}\,.$$

Exercice 6 (Temps de départ)**.**
Soit (X_n) la chaîne de Markov canonique qur un espace dénombrable E, de matrice de transition Q. On suppose que $Q(x,x) < 1$ pour tout x. On note $\mathcal{F}_n$ la filtration canonique et on définit
$$\tau = \inf\{n \geq 1,\ X_n \neq X_0\}.$$

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que pour tout $x \in E$, τ est fini $\mathbb{P}_x$-p.s. Calculer les lois de τ et de X_τ sous $\mathbb{P}_x$.

2. On définit une suite de va par
$$\tau_0 = 0,\ \tau_1 = \tau,\ \tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k,\ X_n \neq X_{\tau_k}\}.$$
Montrer que les τ_k sont des temps d'arrêt finis $\mathbb{P}_x$-p.s.

3. On définit un processus (Y_n) par $Y_n = X_{\tau_n}$. Montrer que (T_n) est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.

4. On suppose que (X_n) est irréductible récurrente. Montrer que (Y_n) est aussi irréductible récurrente.

5. Soit μ une mesure invariante pour (X_n). montrer que ν définie par
$$\nu(x) = (1 - Q(x,x))\mu(x)$$
est une mesure invariante pour (Y_n).