PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 8
CHAÎNES DE MARKOV - PROPRIÉTÉ DE MARKOV FORTE - CLASSIFICATION DES ÉTATS

Exercice 1 (Questions "simples" sur la classification des états)**.**
On notera génériquement $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de fonction de transition Q à valeurs dans un espace d'états dénombrable S. On notera $N_x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$.

1. Donner un exemple où l'ensemble des points visités par la chaîne issue de x n'est pas déterministe, i.e. constant p.s.
2. Donner un exemple où, sans que x soit récurrent, sous $\mathbb{P}_x$, l'ensemble des points visités par la chaîne est p.s. toujours le même. Donner un exemple où, de plus, l'ordre des 3 premiers points visités en partant de x n'est pas déterministe.
3. Pour $x, y \in S$, a-t-on : y récurrent et il existe n tel que $Q^n(x, y) > 0 \Rightarrow N_y = \infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. ?
4. Donner un exemple où il existe n tel que $Q^n(x, y) > 0$ mais pour tout p, $Q^p(y, x) = 0$.
5. Montrer que pour $x, y \in S$, $\mathbb{E}_x(N_y) = \infty \Rightarrow y$ récurrent. La réciproque est-elle vraie ?
6. Peut-on avoir $0 < \mathbb{E}_x(N_y) < \infty$, avec y récurrent ?
7. Si $\mathbb{E}_x(N_y) = \infty$, quelles valeurs peut prendre $\mathbb{E}_y(N_x)$?
8. On suppose que pour tout $x \in S$, l'ensemble $V_x = \{y \in S \,|\, \exists n \, t.q. \, Q^n(x, y) > 0\}$ est fini. Montrer qu'il existe des états récurrents.
9. On suppose qu'il existe un état $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $\sum Q^n(x_0, x) > 0$ et $\mathbb{P}_x(\tau_{x_0} < \infty) = 1$ avec τ_{x_0} le temps d'atteinte de x_0. Est-ce que la chaîne est récurrente ?

Exercice 2 (Chaînes irréductibles)**.**
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace dénombrable S de fonction de transition Q. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible si et seulement si il n'existe pas de sous-ensemble strict non vide F de S tel que

$$\forall x \in F,\ \forall y \in F^c, \qquad Q(x, y) = 0\,.$$

Exercice 3.
Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ avec $k \neq 0$, montrer que l'espérance du nombre de visites de k avant le premier retour en 0 est 1.

Exercice 4.
Montrer que la marche aléatoire simple sur l'arbre binaire complet est transiente.

Exercice 5 (Chaîne de naissance et de mort)**.**
Soit Q la fonction de transition sur $\mathbb{N}$ donnée par:

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $p_0 > 0$, $p_0 + r_0 = 1$, $p_i > 0$, $q_i > 0$ et $p_i + r_i + q_i = 1$ pour $i \geq 1$. Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction de transition Q.

1. Montrer que X est irréductible.

2. On suppose que
$$\sum_{i\geq 1} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} < \infty .$$
Montrer que X admet une mesure de probabilité réversible π qu'on déterminera. Que peut-on en déduire sur X ?

3. On considère le cas où $p_i = p > 0$ pour tout $i \geq 0$ et $q_i = q > 0$ pour tout $i \geq 1$ avec $p < q$. Calculer $\mathbb{E}_i(H_i)$ pour tout $i \geq 0$, où $H_i = H_i(X_0, X_1, ...) = \inf\{n \geq 1 \,:\, X_n = i\}$ désigne le premier temps de retour en i.

Exercice 6 (Temps de départ)**.**
Soit (X_n) la chaîne de Markov canonique qur un espace dénombrable E, de matrice de transition Q. On suppose que $Q(x,x) < 1$ pour tout x. On note $\mathcal{F}_n$ la filtration canonique et on définit
$$\tau = \inf\{n \geq 1,\ X_n \neq X_0\}.$$

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que pour tout $x \in E$, τ est fini $\mathbb{P}_x$-p.s. Calculer les lois de τ et de X_τ sous $\mathbb{P}_x$.

2. On définit une suite de va par
$$\tau_0 = 0,\ \tau_1 = \tau,\ \tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k,\ X_n \neq X_{\tau_k}\}.$$
Montrer que les τ_k sont des temps d'arrêt finis $\mathbb{P}_x$-p.s.

3. On définit un processus (Y_n) par $Y_n = X_{\tau_n}$. Montrer que (T_n) est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.

4. On suppose que (X_n) est irréductible récurrente. Montrer que (Y_n) est aussi irréductible récurrente.

5. Soit μ une mesure invariante pour (X_n). montrer que ν définie par
$$\nu(x) = (1 - Q(x,x))\mu(x)$$
est une mesure invariante pour (Y_n).