TD 8

Exercice 1.

Soit G un groupe et (V, ρ) une représentation complexe de dimension finie de G. Soit W une sous-représentation de V, non nulle et distincte de V.

1. Donner un exemple pour lequel W n'admet pas de supplémentaire G-stable.
2. Le théorème de Maschke, vu en cours, affirme que W admet un supplémentaire G-stable dès lors que G est fini. Démontrer que c'est encore le cas si on suppose seulement que $\rho(G)$ est fini.
3. On suppose à présent que l'image de $\rho(G)$ dans $\mathrm{PGL}(V)$ est finie. Démontrer que W admet un supplémentaire G-stable, puis que V est une somme directe de représentations irréductibles de G.

Exercice 2.

Soit Z un sous-groupe central d'un groupe G (i.e. $zg = gz$ pour g dans G et z dans Z), et soit (V, ρ) une représentation complexe de dimension finie de G.

1. Si V est irréductible, démontrer que Z agit sur V par homothéties, i.e. $\rho(Z)$ est contenu dans le sous-groupe $\mathbb{C}^\times$ de $\mathrm{GL}(V)$.
2. Si Z agit sur V par homothéties, et si Z est d'indice fini dans G, démontrer que V est une somme directe de représentations irréductibles de G (on pourra utiliser la question 3 de l'exercice précédent).

Exercice 3.

Une *représentation projective complexe* d'un groupe Q est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V muni d'un morphisme $\rho : Q \to \mathrm{PGL}(V)$. On a encore dans ce cadre des notions de sous-espace Q-stable, d'indécomposable, d'irréductible, de produit tensoriel (mais pas de somme directe). Soit (V, ρ) une représentation projective complexe d'un groupe Q.

1. Démontrer qu'il existe un groupe G et un morphisme de groupes surjectif $\pi : G \to Q$, de noyau central dans G, et un morphisme $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V)$, tel que $\rho \circ \pi$ soit la composition de ρ' avec la projection $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{PGL}(V)$.
2. On suppose que Q est fini. Démontrer que tout sous-espace Q-stable de V admet un supplémentaire Q-stable (on pourra utiliser la question 2 de l'exercice précédent), puis que V est une somme directe de sous-espaces Q-stables irréductibles.

Exercice 4.

On considère une suite exacte de groupes
$$1 \to I \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} Q \to 1,$$
où I est un groupe fini. Soit (V, ρ) une représentation complexe de dimension finie de G. Puisque I est fini, on peut décomposer V, vue comme représentation de I, en composante isotypiques :
$$V = \bigoplus_{\chi \in X} V[\chi],$$
où X est un ensemble de classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de I, et $V[\chi] \neq 0$ est la composante χ-isotypique de V.

1. Démontrer que pour tout g dans G et tout χ dans X, l'automorphisme $\rho(g)$ envoie $V[\chi]$ sur $V[g(\chi)]$, où $g(\chi)$ est un élément de X que l'on précisera.
2. Démontrer que $(g, \chi) \mapsto g(\chi)$ fournit une action à gauche de G sur X. Démontrer que cette action se factorise par le morphisme surjectif $\pi : G \to Q$.
3. Si V est irréductible, démontrer que cette action de Q sur X est transitive (et que X est n'est pas vide).
4. On suppose que V est irréductible comme représentation de I. Démontrer que l'image de $\rho(G)$ dans $\mathrm{PGL}(V)$ est finie. Donner un exemple où $\rho(G)$ est infini.

Exercice 5.

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. Démontrer qu'il existe un unique isomorphisme $\xi : V^* \otimes_K V \to \mathrm{End}(V)$ qui envoie $v^* \otimes v$ sur $v^*(v)$ pour tous v, v^* dans V et V^* respectivement.
2. Généraliser à $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ lorsque V et W sont des K-espaces vectoriels de dimensions finies.

Exercice 6.

Soit K un corps, et soient A et B des K-algèbres.

1. Démontrer qu'il existe une unique structure de K-algèbre sur $A \otimes_K B$ telle que
$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2),$$
pour tous a_1, a_2 dans A et tous b_1, b_2 dans B.
2. Démontrer que pour toute paire de morphismes de K-algèbres $f : A \to C$ et $g : B \to C$, il existe un unique morphisme de K-algèbres $h : A \otimes_K B \to C$ tel que
$$h(a \otimes b) = f(a)g(b),$$
pour tous a, b dans A et B respectivement. Ce morphisme h est souvent noté $f \otimes g$.
3. Montrer que les K-algèbres $K[X] \otimes_K K[Y]$ et $K[X, Y]$ sont isomorphes.
4. Montrer que le morphisme naturel de K-algèbres de $K(X) \otimes_K K(Y)$ vers $K(X, Y)$ est injectif mais non surjectif.

Exercice 7.

Soit V et W des représentations d'un groupe G sur un corps K. Montrer qu'il existe une unique structure de représentation de G sur $V \otimes_K W$ telle que $g(u \otimes v) = g(u) \otimes g(v)$ pour tous u, v et g dans U, V et G respectivement.

Exercice 8.

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. On pose $V^{\otimes 0} = K$ et $V^{\otimes n} = V \otimes_K V^{\otimes (n-1)}$ pour chaque entier $n \geq 1$.

1. Démontrer qu'il existe une unique structure de représentation de $\mathfrak{S}_n$ sur $V^{\otimes n}$ telle que
$$\sigma^{-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)},$$
pour tous $v_1, \ldots, v_n$ dans V.
2. Calculer la dimension de l'espace vectoriel $(V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ formé des éléments de $V^{\otimes n}$ qui sont fixés par l'action de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 9.

Soit V_1 (resp. V_2) la représentation complexe de dimension 1 de $\mathfrak{S}_3$ donnée par $\sigma \mapsto 1$ (resp. $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$), et soit V_3 la représentation de $\mathfrak{S}_3$ donnée par
$$V_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$
où $\mathfrak{S}_3$ agit par permutations des coordonnées. On a vu dans le TD précédent que toute représentation de $\mathfrak{S}_3$ est une somme directe de copies des représentations V_1, V_2 ou V_3.

1. Pour tous i, j, décomposer la représentation $V_i \otimes_{\mathbb{C}} V_j$ en somme de copies de V_1,V_2 et V_3.
2. Décomposer $V_3^{\otimes n}$ en somme de copies de V_1, V_2 et V_3.
3. Démontrer que $(V_3^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ (cf. exercice précédent) est une sous $\mathfrak{S}_3$-représentation de $V_3^{\otimes n}$, et décomposer cette représentation en somme de copies de V_1, V_2, et V_3.

Exercice 10.

Pour tout groupe G, on note $R(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations complexes de dimension finie de G. On note $[V]$ la classe dans $R(G)$ d'une représentation V.

1. Démontrer qu'il existe sur $R(G)$ une unique structure de semi-anneau (mêmes axiomes qu'un anneau, sauf que l'on n'impose pas l'existence d'inverses pour l'addition) pour laquelle on a
$$[V] \times [W] = [V \otimes_{\mathbb{C}} W],$$
$$[V] + [W] = [V \oplus_{\mathbb{C}} W],$$
pour toutes G-représentations de dimension finie V, W. Démontrer que $R(G)$ est commutatif, et déterminer son élément neutre.
2. Décrire les semi-anneaux $R(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et $R(\mathfrak{S}_3)$ (pour ce dernier, on utilisera la question 2 de l'exercice précédent).