8 Chaînes de Markov (Théorèmes ergodiques)

Exercice 8.1 (Durée de vie des ampoules). On considère sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant:

- $\mu = \mathbb{E}(Y_1) < \infty$
- pgcd $\{n \geq 1 : \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1$.

On définit le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \inf\{m \geq n \,|\, \exists k \geq 1, Y_1 + \ldots + Y_k = m\} - n\,.$$

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive et apériodique. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\exists k \geq 1 : Y_1 + \ldots + Y_k = n) = \frac{1}{\mu}.$$

Indication: X_n est la distance de l'entier n au premier point de $\{Y_1 + \ldots + Y_k\,;\, k \in \mathbb{N}\}$ situé à sa droite (faire un dessin !).

Remarque: Imaginons que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ représente la durée de vie d'ampoules. Quand la k^e ampoule ne fonctionne plus, on la remplace par la $(k+1)^e$ dont la durée de vie est Y_{k+1}. Alors, asymptotiquement, la probabilité d'avoir à changer d'ampoule à l'instant n est l'inverse de la moyenne de la durée de vie des ampoules.

Exercice 8.2 (Rangement sur une étagère). Chaque matin un étudiant prend un des trois livres (numérotés de 1 à 3) posés sur son étagère. La probabilité qu'il choisisse le livre i est α_i, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, où $0 < \alpha_i < 1$, et les choix qu'il fait jours après jours sont indépendants. Le soir, il replace le livre qu'il a pris à gauche des autres, sans déranger les autres. Quel est le comportement asymptotique de p_n, la probabilité que le n-ième matin au réveil l'étudiant trouve ses livres rangés dans l'ordre $(1, 2, 3)$ (de gauche à droite)? Quel est le comportement asymptotique du nombre de fois où l'étudiant prend le livre le plus à gauche sur son étagère?

Exercice 8.3 (h-tranformée d'une matrice stochastique).

1. Soient S un ensemble dénombrable, et $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans S, de fonction de transition $P = (P(i,j))_{(i,j)\in E}$. Soit $h : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application bornée telle que, pour tout $i \in S$, sous $\mathbb{P}_i$, $h(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration canonique. Montrer que l'on définit une fonction de transition sur $S_+ = \{k \in S : h(k) > 0\}$ par la formule

$$Q(i,j) = \frac{h(j)}{h(i)} P(i,j)\,.$$

On dit que Q est la h-transformée de P.

2. On considère l'exemple de la marche aléatoire simple symétrique $(S_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$. On note $T_i = T_i(S_0, S_1, \ldots) = \inf\{n \geq 0 : S_n = i\}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Pour $N \geq 1$ et $1 \leq k \leq N$, on pose

$$\mathbb{P}_k^{(N)} = \mathbb{P}_k(\cdot \mid T_N < T_0)\,.$$

(Ici $\mathbb{P}_k$ est associé à la chaîne de Markov (S_n) considérée, donc sous $\mathbb{P}_k$, $S_0 = k$ p.s.)

(a) On rappelle que pour tout $N \geq 1$ et pour tout $1 \leq k \leq N$,

$$\mathbb{P}_k(T_N < T_0) = \frac{k}{N}\,.$$

Montrer que sous $\mathbb{P}_k^{(N)}$, $(S_{n\wedge T_N})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov (à valeurs dans $\{1,\ldots,N\}$) et donner sa fonction de transition.

(b) Trouver une fonction $h : \{0,\ldots,N\} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que la fonction de transition de $(S_{n\wedge T_N})_{n\geq 0}$ sous $\mathbb{P}_k^{(N)}$ est la h-transformée de la fonction de transition de $(S_{n\wedge T_0\wedge T_N})_{n\geq 0}$ sous $\mathbb{P}_k$.

Exercice 8.4 (Chaîne de Markov et martingale)**.** Soit S un ensemble dénombrable. On note $\mathscr{H}$ l'espace vectoriel des applications bornées de S dans $\mathbb{R}$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans S de fonction de transition $Q = (Q(i,j))_{(i,j)\in E}$. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire $A : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ tel que, pour tout $f \in \mathscr{H}$, la suite $(M_n^f)_{n\geq 0}$ définie par

$$M_0^f = f(X_0) \qquad et \qquad M_n^f = f(X_n) - \sum_{i=0}^{n-1} A(f)(X_i) \qquad pour \qquad n \geq 1$$

soit une martingale pour la filtration naturelle de $(X_n)_{n\geq 0}$.