8 Chaînes de Markov (Théorèmes ergodiques)

Exercice 8.1 (Durée de vie des ampoules). On considère sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant:

- $\mu = \mathbb{E}(Y_1) < \infty$
- pgcd $\{n \geq 1 : \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1$.

On définit le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \inf\{m \geq n \,|\, \exists k \geq 1, Y_1 + \ldots + Y_k = m\} - n\,.$$

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive et apériodique. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\exists k \geq 1 : Y_1 + \ldots + Y_k = n) = \frac{1}{\mu}.$$

Indication: X_n est la distance de l'entier n au premier point de $\{Y_1 + \ldots + Y_k\,;\, k \in \mathbb{N}\}$ situé à sa droite (faire un dessin !).

Remarque: Imaginons que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ représente la durée de vie d'ampoules. Quand la k^e ampoule ne fonctionne plus, on la remplace par la $(k+1)^e$ dont la durée de vie est Y_{k+1}. Alors, asymptotiquement, la probabilité d'avoir à changer d'ampoule à l'instant n est l'inverse de la moyenne de la durée de vie des ampoules.

Correction : On remarque que, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \begin{cases} X_n - 1 & \text{si } X_n \neq 0 \\ Y_{k+1} - 1 & \text{si } X_n = 0 \text{ et } n = Y_1 + \ldots + Y_k \end{cases} \\ &= \mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}}(X_n - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Y_1+\ldots+Y_k=n\}}(Y_{k+1} - 1)\,. \end{aligned}$$

Sur l'événement $\{Y_1 + \ldots + Y_k = n\}$ (qui est évidemment dans $\sigma(Y_1, \ldots, Y_k)$), les variables $X_0, \ldots, X_n$ sont $\sigma(Y_1, \ldots, Y_k)$-mesurables, et donc indépendantes de $X_{n+1} = Y_{k+1} - 1$. Sur l'événement $\{X_n \geq 1\}$, $X_{n+1} = X_n - 1$ p.s. Cela implique que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de fonction de transition Q définie par

$$\begin{aligned} Q(i, i-1) &= 1 && \text{pour } i \geq 1 \\ Q(0, i) &= \mathbb{P}(Y_1 = i+1) && \text{pour } i \geq 0 \\ Q(i, j) &= 0 && \text{dans les autres cas}\,. \end{aligned}$$

En effet, on a pour tous $(x_0, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{N}$, si $x_n > 0$:

$$\mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots, X_{n+1} = x_{n+1}] = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{n+1} \neq x_n - 1 \\ \mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] & \text{sinon} \end{cases},$$

et si $x_n = 0$, par l'indépendance énoncée ci-dessus:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_{n+1} = x_{n+1}] &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n, X_{n+1} = x_{n+1}] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n, Y_{k+1} = x_{n+1} + 1] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n]\, \mathbb{P}[Y_{k+1} = x_{n+1} + 1] \\
&= \left(\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n] \right) \\
&\qquad \times \mathbb{P}[Y_1 = x_{n+1} + 1] \\
&= \mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = 0]\, \mathbb{P}[Y_1 = x_{n+1} - 1] .
\end{aligned}$$

L'espace d'états de $(X_n)_{n\geq 0}$ est $S = \{0, \dots, M\}$ si $M = \sup\{i \geq 0 : \mathbb{P}(Y_1 = i+1) > 0\} < \infty$ et $S = \mathbb{N}$ sinon. On vérifie facilement que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible: soient $i, j \in S$, si $i > j$, $Q^{j-i}(i, j) = 1 > 0$, et si $i \leq j$, $Q^{i+m-j+1}(i, j) \geq Q^i(i, 0)Q(0, m)Q^{m-j}(m, j) > 0$ pour $m \geq j$ tel que $\mathbb{P}(Y_1 = m) > 0$.

Dans le cas où la chaîne est à espace d'états fini, il est immédiat que la chaîne, étant irréductible, est récurrente positive. Dans le cas général, on remarque que, $\mathbb{P}$ p.s., $H_0 = Y_1$ (où H_0 désigne le premier temps de "retour" en 0, i.e. $H_0 = \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n = 0\}$). Ainsi, $\mathbb{E}(H_0) = \mu < \infty$, ce qui implique que $(X_n)_{n\geq 0}$ est récurrente (car $X_0 = 0$ et H_0 est fini $\mathbb{P}$ p.s.) positive.

Enfin, pour tout $n \geq 1$,

$$Q^n(0, 0) \geq \mathbb{P}(Y_1 = n),$$

donc

$$L_0 = \{n \geq 1 \,|\, Q^n(0, 0) > 0\} \supset \{n \geq 1 \,|\, \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\},$$

où ce dernier ensemble est de PGCD 1, donc 0 est de période 1, donc la chaîne est apériodique.

On a donc

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathbb{E}(H_0)}$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}(\exists k \geq 1 \,|\, Y_1 + \ldots + Y_k = n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu} .$$

Exercice 8.2 (Rangement sur une étagère)**.** Chaque matin un étudiant prend un des trois livres (numérotés de 1 à 3) posés sur son étagère. La probabilité qu'il choisisse le livre i est α_i, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, où $0 < \alpha_i < 1$, et les choix qu'il fait jours après jours sont indépendants. Le soir, il replace le livre qu'il a pris à gauche des autres, sans déranger les autres. Quel est le comportement asymptotique de p_n, la probabilité que le n-ième matin au réveil l'étudiant trouve ses livres rangés dans l'ordre $(1, 2, 3)$ (de gauche à droite)? Quel est le comportement asymptotique du nombre de fois où l'étudiant prend le livre le plus à gauche sur son étagère?

Correction : Pour tout $n \geq 0$, on note X_n l'ordre des livres au i-ème matin (avant que l'étudiant ne fasse son choix). X_n est à valeurs dans l'espace d'états fini

$$S = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\} .$$

On note ξ_n le numéro du livre choisi par l'étudiant le n-ième matin. Les $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{1,2,3\}$, de loi (qu'on va noter γ) $\mathbb{P}[\xi_1 = i] = \alpha_i$ pour $i = 1,2,3$. Pour tout n, X_n est $\sigma(\xi_0,...,\xi_{n-1})$-mesurable, donc ξ_n est indépendant de $(X_0,...,X_n)$. Soient $x_0 = (a_0,b_0,c_0),...,x_{n+1} = (a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1})$ des élements de S, on a donc

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_0 = x_0,...,X_{n+1} = x_{n+1}] \\
&\quad = \begin{cases}
\mathbb{P}[X_0 = x_0,...,X_n = x_n, \xi_n = a_n] & = \mathbb{P}[X_0 = x_0,...,X_n = x_n]\,\alpha_{a_n} \\
& \text{si } x_{n+1} = (a_n,b_n,c_n) \\
\mathbb{P}[X_0 = x_0,...,X_n = x_n, \xi_n = b_n] & = \mathbb{P}[X_0 = x_0,...,X_n = x_n]\,\alpha_{b_n} \\
& \text{si } x_{n+1} = (b_n,a_n,c_n) \\
\mathbb{P}[X_0 = x_0,...,X_n = x_n, \xi_n = c_n] & = \mathbb{P}[X_0 = x_0,...,X_n = x_n]\,\alpha_{c_n} \\
& \text{si } x_{n+1} = (c_n,a_n,b_n) \\
0 & \text{sinon}.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

On en déduit que (X_n) est une chaîne de Markov, à valeurs dans S, de fonction de transition Q déterminée par:

$$
\begin{aligned}
Q((a,b,c),(a,b,c)) &= \alpha_a\,, \\
Q((a,b,c),(b,a,c)) &= \alpha_b\,, \\
Q((a,b,c),(c,a,b)) &= \alpha_c\,, \\
Q((a,b,c),(d,e,f)) &= 0 \ \text{ dans les autres cas,}
\end{aligned}
$$

pour tout $(a,b,c) \in S$.

Cette chaîne est irréductible. En effet, pour tout $(a,b,c) \in S$, on a

$$Q((a,b,c),(a,b,c)) = \alpha_a > 0\,,\ Q((a,b,c),(b,a,c))\,\alpha_b > 0 \text{ et } Q((a,b,c),(c,a,b)) = \alpha_c > 0\,,$$

mais aussi

$$
\begin{aligned}
& Q^2((a,b,c),(c,b,a)) && \geq Q((a,b,c),(b,a,c))Q((b,a,c),(c,b,a)) && = \alpha_b\alpha_c && > 0\,, \\
& Q^2((a,b,c),(a,c,b)) && \geq Q((a,b,c),(c,a,b))Q((c,a,b),(a,c,b)) && = \alpha_c\alpha_a && > 0\,, \\
\text{et}\quad & Q^2((a,b,c),(b,c,a)) && \geq Q((a,b,c),(c,a,b))Q((c,a,b),(b,c,a)) && = \alpha_c\alpha_b && > 0\,.
\end{aligned}
$$

L'espace d'états S étant fini, et la chaîne étant irréductible, elle est récurrente positive. Elle possède donc une unique probabilité invariante, qui nous allons noter π.

Finalement, il est évident que cette chaîne est apériodique, puisque $Q((1,2,3),(1,2,3)) = \alpha_1 > 0$ (tous les états d'une chaîne irréductible récurrente ont même période). Le comportement asymptotique de (X_n) est donc donné par π: on sait que pour tout $(a,b,c) \in S$, p.s.,

$$\mathbb{P}_{(a,b,c)}[X_n = (1,2,3)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi((1,2,3))\,,$$

donc $\lim_{n\to\infty} p_n = \pi((1,2,3))$. Il nous reste donc à calculer π.

L'idée naturelle est de chercher une mesure réversible, mais malheureusement il n'en existe pas pour cette chaîne. En effet, on a $Q((1,2,3),(3,1,2)) = \alpha_3 > 0$ mais $Q((3,1,2)(1,2,3)) = 0$, donc si π était réversible on aurait $\pi((1,2,3)) = 0$ (car on aurait $0 = \alpha_3\pi((1,2,3))$), et comme la chaîne est irréductible, en passant d'états en états avec une probabilité strictement positive, on obtiendrait que

$\pi = 0$, ce qui est absurde (voir l'exercice 3 pour plus de détails). Heureusement, S est de cardinal seulement 6, donc trouver la probabilité invariante est quand même possible. Prenons un état (a,b,c) générique dans S. $Q(x,(a,b,c)) > 0$ si et seulement si $x \in \{(a,b,c),(b,a,c),(b,c,a)\}$, et dans ce cas $Q(x,(a,b,c)) = \alpha_a$. La condition d'invariance pour π s'écrit donc, pour tout $(a,b,c) \in S$,

$$\pi((a,b,c)) = \alpha_a \left[\pi((a,b,c)) + \pi((b,a,c)) + \pi((b,c,a))\right] . \tag{1}$$

En considérant (1) pour les états (a,b,c) et (a,c,b), et en sommant les deux relations obtenues, on obtient

$$\pi((a,b,c)) + \pi((a,c,b)) = \alpha_a \sum_{x\in S} \pi(x) = \alpha_a .$$

Alors (1) donne

$$\pi((a,b,c)) = \alpha_a \left(\pi((a,b,c)) + \alpha_b\right)$$

et donc

$$\pi((a,b,c)) = \frac{\alpha_a \alpha_b}{1-\alpha_a} .$$

On en déduit que p_n converge vers $\pi((1,2,3)) = \alpha_1\alpha_2/(1-\alpha_1)$.

• A présent, on veut des informations sur le nombre moyen de fois où l'étudiant choisit le livre qui est à une place donnée. On voit que la place du livre choisi le jour n est une information qui n'est pas contenue dans X_n ou X_{n+1}, mais elle est contenu dans le couple (X_n, X_{n+1}), ou dans le couple (X_n, ξ_n).

Je m'interesse ici à l'approche dans laquelle on regarde de plus près la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((X_n,\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Pour simplifier les notations, si $x \in S$ et $a \in \{1,2,3\}$, je note x^a l'élément de S obtenu à partir de x en faisant passer a à gauche du triplet x sans désordonner les deux autres éléments de x, par exemple $(1,2,3)^2 = (2,1,3)$. Je vais moins détailler les démonstrations dans ce cas, puisque la rédaction complète a déjà été faite dans l'étude de la chaîne (X_n). On vérifie facilement que (Z_n) est une chaîne de Markov, de matrice de transition $\widetilde{Q}$ définie par

$$\forall (x,a),(y,b) \in S \times \{1,2,3\} \qquad \widetilde{Q}((x,a),(y,b)) = \begin{cases} \alpha_b & \text{si } y = x^a , \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Cette chaîne est irréductible, comme l'était (X_n), car pour tout $b \in \{1,2,3\}$, $\widetilde{Q}((x,a),(x^a,b)) > 0$. Etant aussi à valeurs dans un espace d'états fini ($S \times \{1,2,3\}$), elle est irréductible récurrente positive. Il existe donc une probabilité invariante pour cette chaîne. Il est naturel de penser que cette probabilité est simplement $\pi \otimes \gamma$ (où γ est la loi des ξ_n), et on le vérifie facilement:

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,a)} \pi(x)\gamma(a)\widetilde{Q}((x,a),(y,b)) &= \sum_{(x,a) \text{ tel que } y=x^a} \pi(x)\alpha_a\alpha_b \\
&= \alpha_b \left(\sum_{(x,a) \text{ tel que } y=x^a} \pi(x)\alpha_a \right) \\
&= \alpha_b \left(\sum_x \pi(x) Q(x,y) \right) \\
&= \gamma(b)\pi(y) ,
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que π est invariante pour Q, et $\gamma(a) = \alpha_a$. Par un théorème du cours, la chaîne (Z_n) étant irréductible récurrente positive, de probabilité invariante $\pi \otimes \gamma$, pour toute fonction $f : S \times \{1,2,3\} \to \mathbb{R}^+$ intégrable par rapport à $\pi \otimes \gamma$, on a (quelque soit l'état initial de la chaîne) p.s.:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(Z_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f(z)\,\pi\otimes\gamma\,(dz).$$

On prend $f((a,b,c),d) = \mathbb{1}_{\{a=d\}}$. En notant G_n l'événement "l'étudiant choisit le livre situé le plus à gauche le n-ième matin", on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{G_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{(a,b,c)\in S} \sum_{d\in\{1,2,3\}} \mathbb{1}_{\{a=d\}}\,\alpha_d\,\pi((a,b,c)) \\
&= \sum_{(a,b,c)\in S} \pi((a,b,c))\,\alpha_a \\
&= \alpha_1\,(\pi((1,2,3)) + \pi((1,3,2))) + \ldots \\
&= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\,.
\end{aligned}$$

Ceci signifie que asymptotiquement, l'étudiant prend le livre situé le plus à gauche sur l'étagère une proportion $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ du temps.

L'autre approche, à savoir décrire les sauts entre X_n et X_{n+1}, est possible aussi, et sera sûrement plus naturelle pour certains. Je ne détaille pas la rédaction ici, mais l'idée est la suivante. On a évidemment

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{G_k\}} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{(a,b,c)\in S} \mathbb{1}_{\{X_k=(a,b,c), X_{k+1}=(a,b,c)\}} = \sum_{(a,b,c)\in S}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=(a,b,c), X_{k+1}=(a,b,c)\}}\,.$$

Or, pour tout état (a,b,c) donné, les excursions hors de l'état (a,b,c) sont i.i.d. Comme (X_n) est une chaîne irréductible récurrente positive de probabilité invariante π, le nombre d'excursions hors de (a,b,c) avant n est p.s. équivalent à $n\pi((a,b,c))$. Donc le nombre de sauts de la chaîne de (a,b,c) à (a,b,c) avant n est p.s. équivalent à $n\pi((a,b,c))Q((a,b,c),(a,b,c))$, puisque chaque excursion en dehors de (a,b,c) commence (et dans ce cas se finit) par un saut de (a,b,c) vers (a,b,c) avec probabilité $Q((a,b,c),(a,b,c))$ et que les excursions sont indépendantes. Il suffit donc de sommer sur les états (a,b,c) pour retrouver le résultat précédant.

Exercice 8.3 (h-tranformée d'une matrice stochastique). 1. Soient S un ensemble dénombrable, et $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans S, de fonction de transition $P = (P(i,j))_{(i,j)\in E}$. Soit $h : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application bornée telle que, pour tout $i \in S$, sous $\mathbb{P}_i$, $h(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration canonique. Montrer que l'on définit une fonction de transition sur $S_+ = \{k \in S : h(k) > 0\}$ par la formule

$$Q(i,j) = \frac{h(j)}{h(i)}P(i,j)\,.$$

On dit que Q est la h-transformée de P.

2. On considère l'exemple de la marche aléatoire simple symétrique $(S_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$. On note $T_i = T_i(S_0, S_1, ...) = \inf\{n \geq 0 : S_n = i\}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Pour $N \geq 1$ et $1 \leq k \leq N$, on pose

$$\mathbb{P}_k^{(N)} = \mathbb{P}_k(\cdot \mid T_N < T_0)\,.$$

(Ici $\mathbb{P}_k$ est associé à la chaîne de Markov (S_n) considérée, donc sous $\mathbb{P}_k$, $S_0 = k$ p.s.)

   (a) On rappelle que pour tout $N \geq 1$ et pour tout $1 \leq k \leq N$,

$$\mathbb{P}_k(T_N < T_0) = \frac{k}{N}\,.$$

   Montrer que sous $\mathbb{P}_k^{(N)}$, $(S_{n\wedge T_N})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov (à valeurs dans $\{1,\dots,N\}$) et donner sa fonction de transition.

   (b) Trouver une fonction $h : \{0,\dots,N\} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que la fonction de transition de $(S_{n\wedge T_N})_{n\geq 0}$ sous $\mathbb{P}_k^{(N)}$ est la h-transformée de la fonction de transition de $(S_{n\wedge T_0\wedge T_N})_{n\geq 0}$ sous $\mathbb{P}_k$.

Correction :

1. Pour $i, j \in S_+$, on a $Q(i,j) \geq 0$. De plus, pour tout $i \in S$, en utilisant le fait que $(h(X_n))_n \geq 0$ est une martingale puis le fait que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur S de fonction de transition P, on a $\mathbb{P}_i$-p.s.

$$h(i) = h(X_0) = \mathbb{E}(h(X_1)|X_0) = \mathbb{E}_i(h(X_1)) = \sum_{j\in S} h(j)P(i,j)\,.$$

On en déduit que $\sum_{j\in S_+} Q(i,j) = 1$ pour $i \in S_+$, et donc immédiatement aussi que $Q(i,j) \leq 1$ pour $i, j \in S_+$. Q est donc bien une fonction de transition sur S_+.

2. (a) On note $X_n = S_{n\wedge T_N}$ et $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où les $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont i.i.d. de loi $(\delta_1 + \delta_{-1})/2$. On veut regarder $\mathbb{P}_k^{(N)}(X_0 = x_0, ..., X_n = x_n)$ pour $n \geq 2$ et $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^{(n+1)}$. En fait, on peut grâce à quelques remarques simples se restreindre à regarder des $(n+1)$-uplets moins généraux. On remarque que

   - cette probabilité est nulle si $x_0 \neq k$;
   - cette probabilité est nulle si il existe $0 \leq j \leq n$ tel que $x_j \notin \{1, ..., N\}$ (X est à valeurs dans $\{1,\dots,N\}$);
   - cette probabilité est nulle si il existe $0 \leq j \leq n-1$ tel que $x_j \neq N$ et $|x_{j+1} - x_j| \neq 1$ (tant que la marche n'est pas arrêtée en N, elle fait des sauts de norme 1);
   - cette probabilité est nulle si il existe $0 \leq j \leq n-1$ tel que $x_j = N$ et $j < i \leq n$ tel que $x_i \neq N$ (quand la marche a atteint N, elle reste en N).

   Il nous reste donc deux cas à regarder.

   • On considère d'abord $n \geq 2$, $x_0 = k$, $x_1, ... x_{n-1} \in \{1, ..., N-1\}$, $x_n \in \{1, ..., N\}$ tels que $|x_{j+1} - x_j| = 1$ pour $0 \leq j \leq n-1$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_k^{(N)}(X_0 = k, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) &= \frac{\mathbb{P}_k(X_0 = k, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n, T_N < T_0)}{\mathbb{P}_k(T_N < T_0)} \\ &= \frac{N}{k}\mathbb{P}_k(X_0 = k, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n, T_N < T_0)\,.\end{aligned}$$

Or on remarque que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_k(X_0=k,X_1=x_1,...,X_n=x_n,T_N<T_0)\\
&\qquad=\mathbb{P}_k\Bigg(\{X_0=k,X_1=x_1,...,X_n=x_n\}\\
&\qquad\qquad\cap\{\inf\{p\geq 0|x_n+\sum_{k=1}^{p}\xi_{n+k}=N\}<\inf\{p\geq 0|x_n+\sum_{k=1}^{p}\xi_{n+k}=0\}\}\Bigg).\\
&\qquad=\mathbb{P}_k\left(X_0=k,X_1=x_1,...,X_n=x_n,T_N(S_n,S_{n+1},...)<T_0(S_n,S_{n+1},...)\right).
\end{aligned}
$$

Par la propriété de Markov faible appliquée au temps n, en notant $\mathscr{F}_n=\sigma(X_0,...,X_n)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_k(X_0=k,X_1=x_1,...,X_n=x_n,T_N<T_0)\\
&\qquad=\mathbb{E}_k\left(\mathbb{1}_{\{X_0=k,X_1=x_1,...,X_n=x_n\}}\mathbb{E}(T_N(S_n,S_{n+1},...)<T_0(S_n,S_{n+1},...)|\mathscr{F}_n)\right)\\
&\qquad=\mathbb{E}_k\left(\mathbb{1}_{\{X_0=k,X_1=x_1,...,X_n=x_n\}}\mathscr{E}_{S_n}(T_N(Y_0,Y_1,...)<T_0(Y_0,Y_1,...))\right)\\
&\qquad=\mathbb{P}_k\left(X_0=k,X_1=x_1,...,X_n=x_n\right)\mathscr{E}_{x_n}\left(T_N(Y_0,Y_1,...)<T_0(Y_0,Y_1,...)\right)\\
&\qquad=\frac{1}{2^n}\times\frac{x_n}{N},
\end{aligned}
$$

où (Y_n) est une chaîne de Markov de même fonction de transition que (X_n), issue de i sous $\mathscr{L}_i$, dont on note l'espérance $\mathscr{E}_i$. On a donc également $\mathscr{E}_{x_n}\left(T_N(Y_0,Y_1,...)<T_0(Y_0,Y_1,...)\right)=x_n/N$. D'où

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_k^{(N)}(X_0=k,X_1=x_1,...,X_n=x_n)&=\frac{x_n}{2^nk}\\
&=\left(\frac{x_1}{2k}\right)\left(\frac{x_2}{2x_1}\right)...\left(\frac{x_n}{2x_{n-1}}\right).
\end{aligned}
$$

• On considère à présent $n\geq 2$, $x_0=k$, $x_k\in\{1,...,N-1\}$ pour $1\leq k\leq l<(n-1)$ et $x_k=N$ pour $k>l$, avec $|x_{k+1}-x_k|=1$ pour $0\leq k\leq l$. Alors

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_k^{(N)}(X_0=k,X_1=x_1,...,X_n=x_n)\\
&\qquad=\frac{\mathbb{P}_k(X_0=k,X_1=x_1,...,X_l=x_l,X_{l+1}=N,...,X_n=N,T_N<T_0)}{\mathbb{P}_k(T_N<T_0)}\\
&\qquad=\frac{\mathbb{P}_k(X_0=k,X_1=x_1,...,X_l=x_l,X_{l+1}=N)}{\mathbb{P}_k(T_N<T_0)}\\
&\qquad=\frac{N}{2^{l+1}k}\\
&\qquad=\left(\frac{x_1}{2k}\right)\left(\frac{x_2}{2x_1}\right)\left(\frac{N}{2x_l}\right)\times 1\cdots 1.
\end{aligned}
$$

On en déduit que $(X_n)_{n\geq 0} = (S_{n\wedge T_N})_{n\geq 0}$ est bien une chaîne de Markov (à valeurs dans $\{1,\dots,N\}$) sous $\mathbb{P}_k^{(N)}$, issue de k, de fonction de transition Q définie par:

$$\begin{array}{rcll} Q(i,i-1) & = & \frac{i-1}{2i} & \text{pour} \quad 2 \leq i \leq N-1 \\ Q(i,i+1) & = & \frac{i+1}{2i} & \text{pour} \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ Q(N,N) & = & 1 & \\ Q(i,j) & = & 0 & \text{sinon.} \end{array}$$

(b) $(S_{n\wedge T_0 \wedge T_N})_{n\geq 0}$ est bien une chaîne de Markov (à valeurs dans $\{0,...,N\}$) sous $\mathbb{P}_k$, issue de k, de fonction de transition P définie par:

$$\begin{array}{rcll} P(i,i-1) & = & \frac{1}{2} & \text{pour} \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ P(i,i+1) & = & \frac{1}{2} & \text{pour} \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ P(N,N) & = & 1 & \\ P(0,0) & = & 1 & \\ P(i,j) & = & 0 & \text{sinon.} \end{array}$$

Vu les définitions de P et Q, il est naturel de poser

$$\begin{array}{rcl} h : \{0,\dots,N\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ n & \longmapsto & n \end{array}$$

La suite de v.a. $h(S_{n\wedge T_0\wedge T_N})_{n\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_k$, quelque soit k, on est donc dans le cadre d'étude de la question 1., et l'on vérifie que Q est bien la h-transformée de la fonction de transition P (ici $E = \{0,\dots,N\}$ et $E_+ = \{1,\dots,N\}$).

Exercice 8.4 (Chaîne de Markov et martingale)**.** Soit S un ensemble dénombrable. On note $\mathscr{H}$ l'espace vectoriel des applications bornées de S dans $\mathbb{R}$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans S de fonction de transition $Q = (Q(i,j))_{(i,j)\in E}$. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire $A : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ tel que, pour tout $f \in \mathscr{H}$, la suite $(M_n^f)_{n\geq 0}$ définie par

$$M_0^f = f(X_0) \qquad et \qquad M_n^f = f(X_n) - \sum_{i=0}^{n-1} A(f)(X_i) \qquad pour \qquad n \geq 1$$

soit une martingale pour la filtration naturelle de $(X_n)_{n\geq 0}$.

Correction : Si un tel opérateur A existe, il doit assurer que M_n^f soit intégrable, $\sigma(X_0,...,X_n)$-mesurable, et que pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(M_{n+1}^f | \sigma(X_0,...X_n)) = M_n^f$. Or comme (X_n) est une chaîne de Markov de fonction de transition Q, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{n+1}^f | \sigma(X_0,\dots,X_n)) &= \mathbb{E}(f(X_{n+1}) | \sigma(X_0,\dots,X_n)) - \sum_{i=0}^{n} A(f)(X_i) \\ &= \mathbb{E}(f(X_{n+1}) | X_n) - \sum_{i=0}^{n} A(f)(X_i) \\ &= Qf(X_n) - A(f)(X_n) - \sum_{i=0}^{n-1} A(f)(X_i) \\ &= M_n^f + Qf(X_n) - f(X_n) - A(f)(X_n). \end{aligned}$$

On doit donc avoir $A(f)(X_n) = Qf(X_n) - f(X_n)$.

A présent on définit un opérateur linéaire sur $\mathscr{H}$ par

$$\begin{array}{rcccl} A & : & \mathscr{H} & \longrightarrow & \mathscr{H} \\ & & f & \longmapsto & A(f) : x \mapsto Qf(x) - f(x). \end{array}$$

Soit $f \in \mathscr{H}$. Vérifions que M^f est une martingale. M^f est adaptée à la filtration naturelle de $(X_n)_{n\geq 0}$, f étant bornée, M_n^f est intégrable pour tout $n \geq 0$ et par ce qui précède on a bien pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(M_{n+1}^f | \sigma(X_1, \ldots X_n)) = M_n^f$.