

TD8 : PRODUIT TENSORIEL

Diego Izquierdo

Les exercices 0 et 1 sont à préparer avant la séance de TD. Pendant la séance, nous traiterons les exercices dans l'ordre suivant : 0, 1, 0', 3, 4.

Exercice 0 (à préparer) : TD7

Faire l'exercice 5 du TD7.

Exercice 0' : TD7

Faire les exercices 9 et 10 du TD7. Calculer aussi l'anneau total des fractions de $C = \mathbb{Z}[X]/(2X)$.

Exercice 1 (à préparer) : Quelques exemples

Calculer les produits tensoriels suivants :

1. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en tant que groupe abélien ;
2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ en tant que groupe abélien ;
3. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en tant que groupe abélien ;
4. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en tant que groupe abélien ;
5. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ en tant que \mathbb{Q} -espace vectoriel ;
6. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$ en tant que \mathbb{Q} -espace vectoriel ;
7. $M \otimes_A A/I$ en tant que A -module, lorsque A est un anneau, I un idéal de A et M un A -module ;
8. $A[X_1, \dots, X_n] \otimes_A A[X_1, \dots, X_m]$ en tant que A -algèbre, lorsque A est un anneau ;
9. $A[X_1, \dots, X_n]/I \otimes_A B$ en tant que B -algèbre, lorsque A est un anneau, B une A -algèbre et I un idéal de $A[X_1, \dots, X_n]$;
10. $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ en tant qu'anneau ;
11. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ en tant que \mathbb{Q} -algèbre ;
12. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ en tant que \mathbb{Q} -algèbre (on admettra ici que la famille $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ est \mathbb{Q} -libre) ;
13. $\mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i)$ en tant que \mathbb{Q} -algèbre ;

Exercice 2 : Produit tensoriel, sommes directes et produits

Soient A un anneau et M un A -module. Soit $(N_i)_{i \in I}$ une famille de A -modules.

1. A-t-on forcément $M \otimes_A (\bigoplus_i N_i) \cong \bigoplus_i (M \otimes_A N_i)$?
2. A-t-on forcément $M \otimes_A (\prod_i N_i) \cong \prod_i (M \otimes_A N_i)$?
3. Soit J un ensemble ordonné filtrant. Soient $(P_j)_{j \in J}$ et $(Q_j)_{j \in J}$ des

systèmes inductifs de A -modules. A-t'on forcément :

$$\left(\varinjlim_j P_j\right) \otimes_A \left(\varinjlim_j Q_j\right) \cong \varinjlim_j (P_j \otimes_A Q_j)?$$

Exercice 3 : Un exemple

Soient $A = \mathbb{Z}[X]$ et $I = (2, X)$.

1. Montrer que $2 \otimes X - X \otimes 2$ est non nul dans $I \otimes_A I$.
2. Montrer que $2 \otimes X - X \otimes 2$ est simultanément de 2-torsion et de X -torsion dans $I \otimes_A I$.
3. Montrer que le sous- A -module de $I \otimes_A I$ engendré par $2 \otimes X - X \otimes 2$ est isomorphe à A/I .

Exercice 4 : Platitude

Soient A un anneau et M, N, P, Q des A -modules. Considérons une suite exacte de A -modules :

$$M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0.$$

1. Montrer que la suite précédente induit une suite exacte :

$$M \otimes_A Q \rightarrow N \otimes_A Q \rightarrow P \otimes_A Q \rightarrow 0.$$

On dit que le foncteur $- \otimes_A Q : A\text{-modules} \rightarrow A\text{-modules}$ est exact à droite.

2. Si le morphisme $M \rightarrow N$ est injectif, le morphisme induit $M \otimes_A Q \rightarrow N \otimes_A Q$ est-il forcément injectif?

On dit que le A -module Q est **plat** si le foncteur $- \otimes_A Q$ est exact, c'est-à-dire si toute suite exacte :

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$$

induit une suite exacte :

$$0 \rightarrow M \otimes_A Q \rightarrow N \otimes_A Q \rightarrow P \otimes_A Q \rightarrow 0.$$

3. Vérifier les propriétés suivantes :
 - (a) Un A -module libre est plat. Plus généralement, un A -module facteur direct d'un A -module libre est plat.
 - (b) Le produit tensoriel de deux A -modules plats est un A -module plat.
 - (c) Si B est une A -algèbre et M un A -module plat, alors $M \otimes_A B$ est un B -module plat.
 - (d) Si B est une A -algèbre plate et M un B -module plat, alors M est un A -module plat.

4. Soit M un A -module. Montrer que M est plat si, et seulement si, pour tout idéal I de A , le morphisme $I \otimes_A M \rightarrow M$ induit par l'injection $I \rightarrow A$ est injectif.
5. (a) Supposons A intègre. Montrer que si M est plat sur A alors M est sans torsion.
 (b) Supposons A principal. Soit M un A -module. Montrer que M est plat si, et seulement, M n'a pas de torsion.
 (c) Prenons $A = \mathbb{C}[X, Y]$ et considérons $\mathfrak{m} = (X, Y)$. Montrer que \mathfrak{m} est un A -module sans torsion mais qu'il n'est pas plat.
 (d) Prenons $B = \mathbb{C}[T^2, T^3]$ et considérons $\mathfrak{n} = (T^2, T^3)$. Montrer que \mathfrak{n} est un B -module sans torsion mais qu'il n'est pas plat.

Exercice 5 : La platitude est une propriété locale

Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A . Soit M un A -module.

1. (a) Montrer que les $S^{-1}A$ -modules $S^{-1}M$ et $M \otimes_A S^{-1}A$ sont canoniquement isomorphes.
 (b) En déduire que $S^{-1}A$ est un A -module plat.
 (c) Supposons A intègre de corps des fractions K . Si M est un A -module, le rang de M est par définition la dimension du K -espace vectoriel $M \otimes_A K$. On le note $\text{rg } M$. Montrer que si l'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$$

de A -modules, alors $\text{rg } N = \text{rg } M + \text{rg } P$.

2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 (i) M est un A -module plat ;
 (ii) $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module plat pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A ;
 (iii) $M_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$ -module plat pour tout idéal premier \mathfrak{m} de A .
3. Supposons que A est un anneau de Dedekind, c'est-à-dire un anneau intègre noethérien tel que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau principal pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A . Montrer que M est plat si, et seulement si, M est sans torsion.

Exercice 6 : Modules plats sur un anneau local

Soit A est un anneau local. Soit \mathfrak{m} son unique idéal maximal.

1. Considérons $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules. Supposons que P est un A -module plat. Montrer que, pour tout A -module Q , la suite :

$$0 \rightarrow M \otimes_A Q \rightarrow N \otimes_A Q \rightarrow P \otimes_A Q \rightarrow 0$$

est exacte.

2. (*Lemme de Nakayama*) Soit M un A -module de type fini tel que $M = \mathfrak{m}M$. Montrer que $M = 0$.
3. Soit M un A -module de type fini. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que M est plat si, et seulement si, M est un A -module libre.

COMPLÉMENT : UN PEU D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

Dans les exercices qui suivent, nous restons dans l'intuition et ne cherchons pas à donner des définitions rigoureuses. Le but de ces exercices est juste de vous faire voir qu'il y a un langage général adapté derrière un grand nombre des propriétés que vous voyez en cours et en TD (notamment les propriétés universelles).

Exercice 7 : Foncteurs adjoints

Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux catégories (par exemple, \mathcal{C} pourrait être la catégorie des ensembles, ou celle des anneaux, ou encore celle des A -modules). Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur : cela signifie en particulier que pour chaque $X \in \mathcal{C}$ on se donne un objet $F(X) \in \mathcal{C}'$ et que pour chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} , on se donne un morphisme $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ de sorte que $F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$ et $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. Si $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur, on dit que G est l'adjoint à droite de F si on a un isomorphisme fonctoriel :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$$

pour $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \mathcal{C}'$. On dit aussi que F est l'adjoint à gauche de G . Donner les adjoints indiqués des foncteurs suivants :

- (i) adjoint à gauche le foncteur oubli $A\text{-Mod} \rightarrow \text{Ens}$ qui à un A -module associe l'ensemble sous-jacent.
- (ii) adjoints à gauche et à droite du foncteur oubli $\text{Top} \rightarrow \text{Ens}$ qui à un espace topologique associe l'ensemble sous-jacent.
- (iii) adjoint à gauche du foncteur $\text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$ qui envoie un groupe abélien sur lui-même dans la catégorie des groupes.
- (iv) adjoint à gauche du foncteur $A\text{-Alg} \rightarrow \text{Mono}$ qui envoie une A -algèbre sur elle-même vue comme monoïde muni de la multiplication.
- (v) étant donné un morphisme d'anneaux $A \rightarrow B$, adjoint à gauche du foncteur $B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ qui envoie un B -module sur lui-même vu comme A -module.

- (vi) étant donné un A -module P , adjoint à droite du foncteur $A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ qui envoie un A -module M sur $M \otimes_A P$.
- (vii) étant donnée une partie multiplicative S d'un anneau A , adjoint à droite du foncteur $A\text{-Mod} \rightarrow S^{-1}A\text{-Mod}$ qui envoie un A -module M sur $S^{-1}M$.

Exercice 8 : Adjonction

Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux catégories. Soient $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs. Montrer que F est adjoint à gauche de G si, et seulement si, il existe un morphisme fonctoriel :

$$\eta(X) : X \rightarrow GF(X)$$

pour $X \in \mathcal{C}$, ainsi qu'un morphisme fonctoriel :

$$\epsilon(Y) : FG(Y) \rightarrow Y$$

pour $Y \in \mathcal{C}'$, tels que :

$$\text{Id}_{F(X)} = \epsilon(F(X)) \circ F(\eta(X))$$

$$\text{Id}_{G(Y)} = G(\epsilon(Y)) \circ \eta(G(Y))$$

pour $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \mathcal{C}'$.

Exercice 9 : Foncteurs exacts

Soient A et B des anneaux. On dit qu'un foncteur $F : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$ est exact à gauche (resp. à droite) si toute suite exacte :

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P$$

(resp. $M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$)

induit une suite exacte de B -modules :

$$0 \rightarrow F(M) \rightarrow F(N) \rightarrow F(P)$$

(resp. $F(M) \rightarrow F(N) \rightarrow F(P) \rightarrow 0$)

Le foncteur F est exact s'il est exact à gauche et à droite. Parmi les foncteurs suivants, dire lesquels sont exacts, exacts à gauche, exacts à droite :

- (i) le foncteur oubli $A\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ qui envoie un A -module sur le groupe abéliens sous-jacent.
- (ii) étant donné un A -module P , le foncteur $A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ qui envoie un A -module M sur $M \otimes_A P$.

- (iii) étant donné un idéal I de A , le foncteur $A - \text{Mod} \rightarrow A/I - \text{Mod}$ qui envoie M sur M/IM .
- (iv) étant donnée une partie multiplicative S d'un anneau A , le foncteur $A - \text{Mod} \rightarrow S^{-1}A - \text{Mod}$ qui envoie un A -module M sur $S^{-1}M$.
- (v) étant donné un A -module P , le foncteur $A - \text{Mod} \rightarrow A - \text{Mod}$ qui envoie M sur $\text{Hom}_{A-\text{Mod}}(M, P)$.

Exercice 10 : Foncteurs représentables

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ un foncteur. On dit que F est représentable s'il existe $X \in \mathcal{C}$ tel que l'on a un isomorphisme fonctoriel :

$$F(Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

pour chaque $Y \in \mathcal{C}$. On dit alors que X représente F . Si A est un anneau, déterminer si les foncteurs suivants sont représentables lorsque \mathcal{C} est la catégorie des A -algèbres :

- (i) le foncteur $B \mapsto GL_n(B)$;
- (ii) le foncteur $B \mapsto \{(x, y) \in B^2 \mid x^4 + y^3 = xy\}$.
- (iii) (*difficile*) le foncteur $B \mapsto \{(t^2, t^3) \mid t \in B\}$.

Déterminer si les foncteurs suivants sont représentables lorsque \mathcal{C} est la catégorie des ensembles, celle des A -modules ou encore celle des anneaux :

- (iv) étant donnée une famille (X_i) d'éléments de \mathcal{C} , le foncteur :

$$Y \mapsto \prod_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y).$$

Le représentant est appelé coproduit des X_i .

- (v) étant donnés deux morphismes $f : X \rightarrow X'$ et $g : X \rightarrow X'$, le foncteur :

$$Y \mapsto \{h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y) \mid h \circ f = h \circ g\}.$$

Le représentant est appelé conoyau de (f, g) .

- (vi) étant donné un système inductif (X_i) , le foncteur :

$$Y \mapsto \varinjlim_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y).$$

Le représentant est appelé limite inductive.

- (vii) étant donnés deux morphismes $f : S \rightarrow X$ et $g : S \rightarrow X'$, le foncteur :

$$Y \mapsto \{(h, k) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y) \mid h \circ f = k \circ g\}.$$

Le représentant est appelé somme amalgamée.

Soit maintenant $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur contravariant : cela signifie en particulier que pour chaque $X \in \mathcal{C}$ on se donne un objet $F(X) \in \mathcal{C}'$ et que pour chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} , on se donne un morphisme $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$ de sorte que $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$. On dit que F est représentable s'il existe $X \in \mathcal{C}$ tel que l'on a un isomorphisme fonctoriel :

$$F(Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

pour chaque $Y \in \mathcal{C}$. On dit alors que X représente F . Déterminer si les foncteurs contravariants suivants sont représentables lorsque \mathcal{C} est la catégorie des ensembles, celle des A -modules ou encore celle des anneaux :

(viii) étant donnée une famille (X_i) d'éléments de \mathcal{C} , le foncteur :

$$Y \mapsto \prod_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i).$$

Le représentant est appelé produit des X_i .

(ix) étant donnés deux morphismes $f : X \rightarrow X'$ et $g : X \rightarrow X'$, le foncteur :

$$Y \mapsto \{h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \mid f \circ h = g \circ h\}.$$

Le représentant est appelé noyau de (f, g) .

(x) étant donnée un système inductif (X_i) , le foncteur :

$$Y \mapsto \varprojlim_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i).$$

Le représentant est appelé limite projective.

(xi) étant donnés deux morphismes d'anneaux $f : X \rightarrow S$ et $g : X' \rightarrow S$, le foncteur :

$$Y \mapsto \{(h, k) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X') \mid f \circ h = g \circ k\}.$$

Le représentant est appelé produit fibré.

Exercice 11 : Lemme de Yoneda

Soit \mathcal{C} une catégorie. Soient X et Y des objets de \mathcal{C} tels qu'on a une bijection fonctorielle :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$$

pour chaque $Z \in \mathcal{C}$. Montrer que X et Y sont isomorphes.

Exercice 12 : Retour aux foncteurs adjoints

Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux catégories. Soient $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs. Montrer que si F est adjoint à gauche de G , alors :

- (i) F est exacte à droite et commute aux coproduits, aux conoyaux, aux sommes amalgamées, et aux limites inductives ;
- (ii) G est exact à gauche et commute aux produits, aux noyaux, aux produits fibrés, et aux limites projectives.