TD8 : Produit tensoriel

Diego Izquierdo

Les exercices 0 et 1 sont à préparer avant la séance de TD. Pendant la séance, nous traiterons les exercices dans l'ordre suivant : 0, 1, 0', 3, 4.

Exercice 0 (à préparer) : TD7
Faire l'exercice 5 du TD7.

Exercice 0' : TD7
Faire les exercices 9 et 10 du TD7. Calculer aussi l'anneau total des fractions de $C = \mathbb{Z}[X]/(2X)$.

Exercice 1 (à préparer) : Quelques exemples
Calculer les produits tensoriels suivants :

1. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en tant que groupe abélien ;
2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ en tant que groupe abélien ;
3. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en tant que groupe abélien ;
4. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en tant que groupe abélien ;
5. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ;
6. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ;
7. $M \otimes_A A/I$ en tant que A-module, lorsque A est un anneau, I un idéal de A et M un A-module ;
8. $A[X_1, ..., X_n] \otimes_A A[X_1, ..., X_m]$ en tant que A-algèbre, lorsque A est un anneau ;
9. $A[X_1, ..., X_n]/I \otimes_A B$ en tant que B-algèbre, lorsque A est un anneau, B une A-alèbre et I un idéal de $A[X_1, ..., X_n]$;
10. $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ en tant qu'anneau ;
11. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-algèbre ;
12. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-algèbre (on admettra ici que la famille $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ est $\mathbb{Q}$-libre) ;
13. $\mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i)$ en tant que $\mathbb{Q}$-algèbre ;

Exercice 2 : Produit tensoriel, sommes directes et produits
Soient A un anneau et M un A-module. Soit $(N_i)_{i \in I}$ une famille de A-modules.

1. A-t'on forcément $M \otimes_A (\bigoplus_i N_i) \cong \bigoplus_i (M \otimes_A N_i)$?

Indications : Oui ! Considérons l'application bilinéaire :

$$f : M \times (\bigoplus_i N_i) \to \bigoplus_i (M \otimes_A N_i)$$

qui pour $m \in M$ et $n \in N_i$ envoie (m, n) sur $m \otimes n \in M \otimes_A N_i$. Par propriété universelle du quotient, elle induit un morphisme $f : M \otimes_A (\bigoplus_i N_i) \to \bigoplus_i (M \otimes_A N_i)$.

Réciproquement, l'injection naturelle $N_i \to \bigoplus_i N_i$ induit un morphisme $M \otimes_A N_i \to M \otimes_A (\bigoplus_i N_i)$ pour chaque i. Par propriété universelle de la somme directe, cela permet d'obtenir un morphisme $g : \bigoplus_i (M \otimes_A N_i) \to M \otimes_A (\bigoplus_i N_i)$. On vérifie alors aisément que f et g sont inverses l'un de l'autre.

2. A-t'on forcément $M \otimes_A (\prod_i N_i) \cong \prod_i (M \otimes_A N_i)$?

Indications : Non ! Prenons par exemple $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q}$, $I = \mathbb{N}$ et $N_i = \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}$ pour chaque $i \in I$. D'une part, on a $\prod_i (M \otimes_A N_i) = 0$. D'autre part, soit n l'élément $(1, 1, 1, ...)$ de $\prod_i N_i$. Montrons que $1 \otimes n$ est non nul. Quitte à identifier $M \otimes_A (\prod_i N_i)$ et $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}(\prod_i N_i)$, on veut montrer que $\frac{n}{1}$ est non nul dans $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}(\prod_i N_i)$. S'il était nul, il existerait $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $sn = 0$ dans $\prod_i N_i$: absurde ! Donc $\frac{n}{1}$ est non nul dans $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}(\prod_i N_i)$ et $1 \otimes n$ est non nul dans $M \otimes_A (\prod_i N_i)$.

3. Soit J un ensemble ordonné filtrant. Soient $(P_j)_{j \in J}$ et $(Q_j)_{j \in J}$ des systèmes inductifs de A-modules. A-t'on forcément :

$$(\varinjlim_j P_j) \otimes_A (\varinjlim_j Q_j) \cong \varinjlim_j (P_j \otimes_A Q_j)?$$

Indications : Oui ! Notons $f_k : P_k \to \varinjlim_j P_j$ et $g_k : Q_k \to \varinjlim_j Q_j$ les morphismes naturels. Par propriété universelle du produit tensoriel, l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} P_k \times Q_k &\to (\varinjlim_j P_j) \otimes_A (\varinjlim_j Q_j) \\ (p, q) &\mapsto f_k(p) \otimes g_k(q) \end{aligned}$$

induit un morphisme :

$$P_k \otimes_A Q_k \to (\varinjlim_j P_j) \otimes_A (\varinjlim_j Q_j).$$

Par propriété universelle de la limite inductive, cela induit un morphisme :

$$\phi : \varinjlim_j (P_j \otimes_A Q_j) \to (\varinjlim_j P_j) \otimes_A (\varinjlim_j Q_j).$$

Réciproquement, pour chaque $j \in J$, on dispose du morphisme naturel :

$$P_j \oplus Q_j \to P_j \otimes_A Q_j, (p, q) \mapsto p \otimes q.$$

En le composant avec le morphisme naturel $P_j \otimes_A Q_j \to \varinjlim_j (P_j \otimes_A Q_j)$, on obtient un morphisme :

$$\varinjlim_j (P_j \oplus Q_j) \to \varinjlim_j (P_j \otimes_A Q_j).$$

Identifions $\varinjlim_j (P_j \oplus Q_j)$ et $(\varinjlim_j P_j) \times (\varinjlim_j Q_j)$ pour obtenir un morphisme :

$$(\varinjlim_j P_j) \times (\varinjlim_j Q_j) \to \varinjlim_j (P_j \otimes_A Q_j).$$

C'est une application bilinéaire : elle induit donc un morphisme

$$\psi : (\varinjlim_j P_j) \otimes_A (\varinjlim_j Q_j) \to \varinjlim_j (P_j \otimes_A Q_j).$$

On vérifie alors que ϕ et ψ sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 3 : Un exemple

Soient $A = \mathbb{Z}[X]$ et $I = (2, X)$.

1. Montrer que $2 \otimes X - X \otimes 2$ est non nul dans $I \otimes_A I$.

2. Montrer que $2 \otimes X - X \otimes 2$ est simultanément de 2-torsion et de X-torsion dans $I \otimes_A I$.

3. Montrer que le sous-A-module de $I \otimes_A I$ engendré par $2 \otimes X - X \otimes 2$ est isomorphe à A/I.

Exercice 4 : Platitude

Soient A un anneau et M, N, P, Q des A-modules. Considérons une suite exacte de A-modules :

$$M \to N \to P \to 0.$$

1. Montrer que la suite précédente induit une suite exacte :

$$M \otimes_A Q \to N \otimes_A Q \to P \otimes_A Q \to 0.$$

On dit que le foncteur $- \otimes_A Q : A-\text{modules} \to A-\text{modules}$ est exact à droite.

2. Si le morphisme $M \to N$ est injectif, le morphisme induit $M \otimes_A Q \to N \otimes_A Q$ est-il forcément injectif ?

On dit que le A-module Q est **plat** si le foncteur $-\otimes_A Q$ est exact, c'est-à-dire si toute suite exacte :

$$0 \to M \to N \to P \to 0$$

induit une suite exacte :

$$0 \to M \otimes_A Q \to N \otimes_A Q \to P \otimes_A Q \to 0.$$

3. Vérifier les propriétés suivantes :

(a) Un A-module libre est plat. Plus généralement, un A-module facteur direct d'un A-module libre est plat.
(b) Le produit tensoriel de deux A-modules plats est un A-module plat.
(c) Si B est une A-algèbre et M un A-module plat, alors $M \otimes_A B$ est un B-module plat.
(d) Si B est une A-algèbre plate et M un B-module plat, alors M est un A-module plat.

4. Soit M un A-module. Montrer que M est plat si, et seulement si, pour tout idéal I de A, le morphisme $I \otimes_A M \to M$ induit par l'injection $I \to A$ est injectif.

5. (a) Supposons A intègre. Montrer que si M est plat sur A alors M est sans torsion.
(b) Supposons A principal. Soit M un A-module. Montrer que M est plat si, et seulement, M n'a pas de torsion.
(c) Prenons $A = \mathbb{C}[X, Y]$ et considérons $\mathfrak{m} = (X, Y)$. Montrer que $\mathfrak{m}$ est un A-module sans torsion mais qu'il n'est pas plat.
(d) Prenons $B = \mathbb{C}[T^2, T^3]$ et considérons $\mathfrak{n} = (T^2, T^3)$. Montrer que $\mathfrak{n}$ est un B-module sans torsion mais qu'il n'est pas plat.

Exercice 5 : La platitude est une propriété locale

Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A. Soit M un A-module.

1. (a) Montrer que les $S^{-1}A$-modules $S^{-1}M$ et $M \otimes_A S^{-1}A$ sont canoniquement isomorphes.

Cours.

(b) En déduire que $S^{-1}A$ est un A-module plat.

En tenant compte de la question précédente, c'est une conséquence immédiate de la question 1 de l'exercice 13 du TD7.

(c) Supposons A intègre de corps des fractions K. Si M est un A-module, le rang de M est par définition la dimension du K-espace vectoriel $M \otimes_A K$. On le note rg M. Montrer que si l'on a une suite suite exacte :

$$0 \to M \to N \to P \to 0$$

de A-modules, alors rg $N =$ rg $M +$ rg P.

Remarquons que $K = (A \setminus \{0\})^{-1}A$. On déduit alors de la question précédente que K est un A-module plat. La suite exacte de A-modules :

$$0 \to M \to N \to P \to 0$$

induit donc une suite exacte de K-espaces vectoriels :

$$0 \to M \otimes_A K \to N \otimes_A K \to P \otimes_A K \to 0.$$

Cela prouve que rg $N =$ rg $M +$ rg P.

2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) M est un A-module plat ;
(ii) $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module plat pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A ;
(iii) $M_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-module plat pour tout idéal premier $\mathfrak{m}$ de A.

> Voir la proposition 2.13 du chapitre 1 du livre *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* de Qing Liu.

3. Supposons que A est un anneau de Dedekind, c'est-à-dire un anneau intègre noethérien tel que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau principal pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. Montrer que M est plat si, et seulement si, M est sans torsion.

> Soit M un A-module. Supposons

Exercice 6 : Modules plats sur un anneau local
Soit A est un anneau local. Soit $\mathfrak{m}$ son unique idéal maximal.

1. Considérons $0 \to M \to N \to P \to 0$ une suite exacte de A-modules. Supposons que P est un A-module plat. Montrer que, pour tout A-module Q, la suite :

$$0 \to M \otimes_A Q \to N \otimes_A Q \to P \otimes_A Q \to 0$$

est exacte.

> Voir la proposition 2.6 du chapitre 1 du livre *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* de Qing Liu.

2. *(Lemme de Nakayama)* Soit M un A-module de type fini tel que $M = \mathfrak{m}M$. Montrer que $M = 0$.

> Voir le lemme 2.7 du chapitre 1 du livre *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* de Qing Liu.

3. Soit M un A-module de type fini. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que M est plat si, et seulement si, M est un A-module libre.

> Voir le théorème 2.16 du chapitre 1 du livre *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* de Qing Liu.

Complément : un peu d'algèbre homologique

Dans les exercices qui suivent, nous restons dans l'intuition et ne cherchons pas à donner des définitions rigoureuses. Le but de ces exercices est juste de vous faire voir qu'il y a un langage général adapté derrière un grand nombre des propriétés que vous voyez en cours et en TD (notamment les propriétés universelles).

Exercice 7 : Foncteurs adjoints

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories (par exemple, $\mathcal{C}$ pourrait être la catégorie des ensembles, ou celle des anneaux, ou encore celle des A-modules). Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur : cela signifie en particulier que pour chaque $X \in \mathcal{C}$ on se donne un objet $F(X) \in \mathcal{C}'$ et que pour chaque morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$, on se donne un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$ de sorte que $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ et $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. Si $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ est un foncteur, on dit que G est l'adjoint à droite de F si on a un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$$

pour $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \mathcal{C}'$. On dit aussi que F est l'adjoint à gauche de G. Donner les adjoints indiqués des foncteurs suivants :

(i) adjoint à gauche le foncteur oubli $A - \mathrm{Mod} \to \mathrm{Ens}$ qui à un A-module associe l'ensemble sous-jacent.

(ii) adjoints à gauche et à droite du foncteur oubli $\mathrm{Top} \to \mathrm{Ens}$ qui à un espace topologique associe l'ensemble sous-jacent.

(iii) adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp}$ qui envoie un groupe abélien sur lui-même dans la catégorie des groupes.

(iv) adjoint à gauche du foncteur $A - \mathrm{Alg} \to \mathrm{Mono}$ qui envoie une A-algèbre sur elle-même vue comme monoïde muni de la multiplication.

(v) étant donné un morphisme d'anneaux $A \to B$, adjoint à gauche du foncteur $B - \mathrm{Mod} \to A - \mathrm{Mod}$ qui envoie un B-module sur lui-même vu comme A-module.

(vi) étant donné un A-module P, adjoint à droite du foncteur $A - \mathrm{Mod} \to A - \mathrm{Mod}$ qui envoie un A-module M sur $M \otimes_A P$.

(vii) étant donnée une partie multiplicative S d'un anneau A, adjoint à droite du foncteur $A - \mathrm{Mod} \to S^{-1}A - \mathrm{Mod}$ qui envoie un A-module M sur $S^{-1}M$.

Exercice 8 : Adjonction

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories. Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ deux foncteurs. Montrer que F est adjoint à gauche de G si, et seulement si, il existe un morphisme fonctoriel :

$$\eta(X) : X \to GF(X)$$

pour $X \in \mathcal{C}$, ainsi qu'un morphisme fonctoriel :

$$\epsilon(Y) : FG(Y) \to Y$$

pour $Y \in \mathcal{C}'$, tels que :

$$\mathrm{Id}_{F(X)} = \epsilon(F(X)) \circ F(\eta(X))$$
$$\mathrm{Id}_{G(Y)} = G(\epsilon(Y)) \circ \eta(G(Y))$$

pour $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \mathcal{C}'$.

Exercice 9 : Foncteurs exacts
Soient A et B des anneaux. On dit qu'un foncteur $F : A-\mathrm{Mod} \to B-\mathrm{Mod}$ est exact à gauche (resp. à droite) si toute suite exacte :

$$0 \to M \to N \to P$$
$$(\text{resp.} \quad M \to N \to P \to 0)$$

induit une suite exacte de B-modules :

$$0 \to F(M) \to F(N) \to F(P)$$
$$(\text{resp.} \quad F(M) \to F(N) \to F(P) \to 0)$$

Le foncteur F est exact s'il est exact à gauche et à droite. Parmi les foncteurs suivants, dire lesquels sont exacts, exacts à gauche, exacts à droite :

(i) le foncteur oubli $A-\mathrm{Mod} \to \mathrm{Ab}$ qui envoie un A-module sur le groupe abéliens sous-jacent.

(ii) étant donné un A-module P, le foncteur $A-\mathrm{Mod} \to A-\mathrm{Mod}$ qui envoie un A-module M sur $M \otimes_A P$.

(iii) étant donné un idéal I de A, le foncteur $A-\mathrm{Mod} \to A/I-\mathrm{Mod}$ qui envoie M sur M/IM.

(iv) étant donnée une partie multiplicative S d'un anneau A, le foncteur $A-\mathrm{Mod} \to S^{-1}A-\mathrm{Mod}$ qui envoie un A-module M sur $S^{-1}M$.

(v) étant donné un A-module P, le foncteur $A-\mathrm{Mod} \to A-\mathrm{Mod}$ qui envoie M sur $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{Mod}}(M, P)$.

Exercice 10 : Foncteurs représentables
Soit $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ un foncteur. On dit que F est représentable s'il existe $X \in \mathcal{C}$ tel que l'on a un isomorphisme fonctoriel :

$$F(Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

pour chaque $Y \in \mathcal{C}$. On dit alors que X représente F. Si A est un anneau, déterminer si les foncteurs suivants sont représentables lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des A-algèbres :

(i) le foncteur $B \mapsto GL_n(B)$;

(ii) le foncteur $B \mapsto \{(x,y) \in B^2 | x^4 + y^3 = xy\}$.
(iii) *(difficile)* le foncteur $B \mapsto \{(t^2, t^3) | t \in B\}$.

Déterminer si les foncteurs suivants sont représentables lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des ensembles, celle des A-modules ou encore celle des anneaux :

(iv) étant donnée une famille (X_i) d'éléments de $\mathcal{C}$, le foncteur :

$$Y \mapsto \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y).$$

Le représentant est appelé coproduit des X_i.

(v) étant donnés deux morphismes $f : X \to X'$ et $g : X \to X'$, le foncteur :

$$Y \mapsto \{h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y) | h \circ f = h \circ g\}.$$

Le représentant est appelé conoyau de (f, g).

(vi) étant donné un système inductif (X_i), le foncteur :

$$Y \mapsto \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y).$$

Le représentant est appelé limite inductive.

(vii) étant donnés deux morphismes $f : S \to X$ et $g : S \to X'$, le foncteur :

$$Y \mapsto \{(h,k) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y) | h \circ f = k \circ g\}.$$

Le représentant est appelé somme amalgamée.

Soit maintenant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur contravariant : cela signifie en particulier que pour chaque $X \in \mathcal{C}$ on se donne un objet $F(X) \in \mathcal{C}'$ et que pour chaque morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$, on se donne un morphisme $F(f) : F(Y) \to F(X)$ de sorte que $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$. On dit que F est représentable s'il existe $X \in \mathcal{C}$ tel que l'on a un isomorphisme fonctoriel :

$$F(Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

pour chaque $Y \in \mathcal{C}$. On dit alors que X représente F. Déterminer si les foncteurs contravariants suivants sont représentables lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des ensembles, celle des A-modules ou encore celle des anneaux :

(viii) étant donnée une famille (X_i) d'éléments de $\mathcal{C}$, le foncteur :

$$Y \mapsto \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i).$$

Le représentant est appelé produit des X_i.

(ix) étant donnés deux morphismes $f : X \to X'$ et $g : X \to X'$, le foncteur :

$$Y \mapsto \{h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) | f \circ h = g \circ h\}.$$

Le représentant est appelé noyau de (f, g).

(x) étant donnée un système inductif (X_i), le foncteur :

$$Y \mapsto \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i).$$

Le représentant est appelé limite projective.

(xi) étant donnés deux morphismes d'anneaux $f : X \to S$ et $g : X' \to S$, le foncteur :

$$Y \mapsto \{(h, k) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X') | f \circ h = g \circ k\}.$$

Le représentant est appelé produit fibré.

Exercice 11 : Lemme de Yoneda
Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soient X et Y des objets de $\mathcal{C}$ tels qu'on a une bijection fonctorielle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$$

pour chaque $Z \in \mathcal{C}$. Montrer que X et Y sont isomorphes.

Exercice 12 : Retour aux foncteurs adjoints
Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories. Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ deux foncteurs. Montrer que si F est adjoint à gauche de G, alors :

(i) F est exacte à droite et commute aux coproduits, aux conoyaux, aux sommes amalgamées, et aux limites inductives ;

(ii) G est exact à gauche et commute aux produits, aux noyaux, aux produits fibrés, et aux limites projectives.