Td n° 8 d'Analyse fonctionnelle

Distributions

Séance du 2 Avril 2015

Exercice 1. *Quelques exemples de distributions*

1. Montrer que $u : \phi \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \phi^{(i)}(i)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini.

2. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ définie par $u(\phi) = \displaystyle\int \phi(x,x)dx$. Montrer que u est bien une distribution, et calculer $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

3. Montrer que $e^{\frac{1}{x^2}}$ appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_*^+)$, mais ne se prolonge pas à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4. Montrer qu'une distribution positive $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (i.e. pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ positive, $u(\phi) \geq 0$) est une mesure.

5. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $v' = u$, et que l'ensemble de telles distributions forme un espace affine.

$\star$

Exercice 2. *Distribution dont le support est un point*

Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{Supp}(u) = \{0\}$. En particulier, u est d'ordre fini m.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ positive, telle que $\psi = \mathbb{1}$ sur un voisinage de $\overline{B(0,1/2)}$ et $\mathrm{Supp}\,\psi \in B(0,1)$. On pose $\psi_r(x) = \psi(x/r)$.

1. Rappeler pourquoi $\psi_r u = u$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telle que pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq m$, $(D^\alpha \phi)(0) = 0$.

2. Montrer que $\|\psi_r \phi\|_m \to 0$ quand $r \to 0$.

3. En déduire que $(u, \phi) = 0$.

4. Montrer qu'il existe a_k tels que $u = \sum_{k=0}^{m} a_k \delta_0^{(k)}$.

$\star$

Exercice 3. *Approximation de l'identité et convolution dans L^p*

1. Soit $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\|\phi * \psi\|_{L^p} \leq \|\phi\|_{L^1} \|\psi\|_{L^p}$

2. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ positive, $\|\phi\|_{L^1} = 1$ et $\mathrm{Supp}\,\phi \subset B(0,1)$. On pose $\phi_m(x) = m^n \phi(mx)$. Si f est continue (bornée), montrer que $\phi_m * f \to f$ uniformément sur les compacts. En déduire que si pour tout $p < \infty$, si $f \in L^p$:

$$\|f * \phi_m - f\|_{L^p} \to 0 \quad \text{quand} \quad m \to \infty.$$

Que se passe-t-il pour L^∞ ? En déduire que $\mathcal{D}$ est dense dans L^p, $p < \infty$.

3. Soient $p, q, r \geq 1$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer l'on a :

$$\|\phi * \psi\|_{L^r} \leq \|\phi\|_{L^p} \|\psi\|_{L^q},$$

et montrer que l'on peut étendre la convolution à $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ en une application bilinéaire continue.

⋆

Exercice 4. *Distributions qui sont régulières*

1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $1 < p < \infty$. On suppose que :

$$\sup_{\phi \in \mathcal{D}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|T(\phi)|}{\|\phi\|_{L^p}} < \infty.$$

Montrer que T s'identifie à une fonction de L^q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(]0,1[)$, tel que T' s'identifie à une fonction de $L^2(]0,1[)$. Montrer que T s'identifie à une fonction $u \in L^2(]0,1[)$. En déduire que que $u \in C^0([0,1])$.

3. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que T' s'identifie à une fonction f continue. Montrer que T s'identifie à une fonction $g \in C^1$ et que $g' = f$.

4. Soient $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C(\mathbb{R})$, tels que au sens des distributions, on a : $u' + au = f$. Montrer que $u \in C^1(\mathbb{R})$ et donc que l'équation précédente à lieu au sens classique.

⋆

Exercice 5. *Support et ordre*

Soit u l'application linéaire sur $\mathcal{D}(R)$ définie par :

$$u(\phi) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \phi\left(\frac{1}{i}\right) - n\phi(0) - \log(n)\phi'(0) \right).$$

1. Montrer que $u(\phi)$ est bien définie, et que u est une distribution d'ordre au plus 2.

2. Quel est le support S de u ?

3. On considère une suite d'élément ϕ_k de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ satisfaisant $\phi_k \in \mathcal{D}(]\frac{1}{k+1}, 2[)$, $0 \leq \phi_k \leq 1/\sqrt{k}$ et $\phi_k|_{[\frac{1}{k},1]} = 1/\sqrt{k}$. à l'aide des ϕ_k, montrer que quelque soit $p \in \mathbb{N}$, on ne peut obtenir aucune majoration du type : $|u(\phi)| \leq C \sum_{i=0}^{p} \sup_{x\in S} |\partial^i \phi(x)|$.

4. Quel est l'ordre de u ?

Indication : On pourra considérer des fonctions du type $\psi_k = \psi(x) \int_0^x \int_0^y \phi(kt) dt dy$, où $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ d'intégrale 1, et $\psi \in \mathcal{D}(]-1,2[)$ est telle que $\psi(x) = 1$ pour $x \in [0,1]$.

⋆

Exercice 6. *Valeur principale de $1/x$*

On souhaite définir la valeur principale de $1/x$, notée $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$. On pose :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad (\mathrm{vp}\, x, \phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right).$$

1. Montrer que la limite existe, et que la formule définit bien une distribution. Quel est son ordre ? (Suggestion : écrire grâce à la formule de Taylor, $\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x)$)

2. Montrer que $x\,\mathrm{vp}\, x = \mathbb{1}$. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xu = \mathbb{1}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mathrm{vp}\, x + c\delta_0$.

3. Montrer que $|x|^{\alpha-1}x \rightharpoonup \mathrm{vp}\, x$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $\alpha \to -1$ ($\alpha > -1$).

⋆