Td n° 8 d'EDP

Equations elliptiques

Séance du 28 novembre 2014

Exercice 1. *Composition et dérivation.*

Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $G(0) = 0$ et $|G'(x)| \leq M$. Soit $u \in W^{1,p}$ (c'est à dire $u \in L^p$ et $\nabla u \in L^p$).

1. Montrer que $G(u) \in L^p$ et $G'(u)\nabla u \in L^p$.

2. En considérant une suite $u_n \in C^\infty$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}$, montrer que

$$\nabla G(u) = G'(u)\nabla u.$$

⋆

Exercice 2. *Composition et sous-solution*

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à coefficients L^∞ telle que

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j.$$

Soit $u \in H^1(\Omega)$ une sous-solution faible de

$$div(A(x)\nabla u) = 0, \tag{1}$$

c'est à dire telle que pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$, positive on ait

$$\int_\Omega A(x)\nabla u \nabla\phi \leq 0.$$

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ convexe et positive. On suppose $f'' = 0$ hors d'un intervalle $[a, b]$ et $f(u) \in L^2$.

1. Montrer que $f(u) \in H^1(\Omega)$ et que pour tout $\phi \in H_0^1 \cap L^\infty(\Omega)$, $f'(u)\phi \in H_0^1(\Omega)$.

2. On suppose f croissante. Montrer que $f(u)$ est une sous-solution faible de (1) et que pour tout $K \subset \Omega$ compact

$$\int_K |\nabla(f(u))|^2 \leq C_K \int_\Omega v^2.$$

3. Montrer que l'on peut remplacer l'hypothèse "f croissante" par "u solution faible de (1)".

4. On suppose maintenant seulement que f est convexe, positive et croissante. Montrer que $f(u) \in H^1_{loc}$ est une sous solution faible de (1).

⋆

Exercice 3. *Variante de l'inégalité de Poincaré*

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une boule. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que si $u \in H^1(B)$ est telle que

$$|\{x \in B, u = 0\}| \geq \varepsilon |B|,$$

alors

$$\int_B u^2 dx \leq C \int_B |\nabla u|^2.$$

$\star$

Exercice 4. *Généralisation de l'inégalité de Cacciopoli*

Soient $A = (a_{ij}(x)) \in L^\infty(\Omega, M_d(\mathbb{R}))$ une matrice telle qu'il existe $C, \alpha > 0$ tels que

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = (A(x)\xi).\xi \leq C|\xi|^2.$$

Soit $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ et $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur linéaire défini par

$$\begin{aligned} Lu &= -div(A(x)\nabla u) + b(x).\nabla u) + c(x)u \\ &= -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\left(a_{ij}(x)\partial_{x_j} u\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_{x_i} u + c(x)u. \end{aligned}$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ tels que $Lu = f$. Soit $\Omega' \subset \Omega$ un ouvert tel que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Montrer que

$$\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_\Omega (u^2 + f^2) dx.$$

Indication : On pourra utiliser comme fonction test $\eta^2 u$ où $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ et vaut 1 sur Ω'.

$\star$

Exercice 5. *Estimation des dérivées d'une fonction harmonique*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ soit une fonction harmonique dans Ω.

1. Montrer que si $B_r(x_0) \subset \Omega$, alors pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y)\nu_j(y)\, dy\,,$$

où ν_j est la j-ième coordonnée du vecteur normal unitaire ν à $\partial B_r(x_0)$.

2. On suppose que $m \leq u \leq M$ sur $\partial B_r(x_0)$ pour deux constantes m et M. Montrer que

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)\right| \leq C_n \frac{(M-m)}{r}\,,$$

où C_n est une constante qui dépend de la dimension.

3. En déduire que si $m \leq u \leq M$ sur $\partial\Omega$, alors

$$|\nabla u(x)| \leq C_n \frac{(M-m)}{d(x, \partial\Omega)}.$$

Indication : On pourra utiliser le principe du maximum.

4. Montrer que si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions harmoniques dans Ω qui est uniformément bornée, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément (ainsi que ses dérivées) sur tout compact de Ω vers une fonction harmonique dans Ω.

$\star$