École Normale Supérieure
28 novembre 2017

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$9 Corrigé

Espaces de Banach et Hilbert

Exercice 1 : bases hilbertiennes

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense d'éléments de E.
On a $\overline{\mathrm{Vect}\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = E$, puisque la famille est dense. Quitte à supprimer les x_n tels que $x_n \in \mathrm{Vect}\,\{x_0, ..., x_{n-1}\}$, ce qui ne change rien à la véracité de cette propriété, on peut supposer que $(x_0, ..., x_n)$ est une famille libre pour tout n.
On définit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en orthonormalisant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la méthode de Gram-Schmidt :

$$e_n = \frac{x_n - \langle x_n, e_{n-1}\rangle e_{n-1} - ... - \langle x_n, e_0\rangle e_0}{||x_n - \langle x_n, e_{n-1}\rangle e_{n-1} - ... - \langle x_n, e_0\rangle e_0||}$$

Les propriétés 1. et 2. sont alors vérifiées. La propriété 3. l'est aussi car $\mathrm{Vect}\,\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \mathrm{Vect}\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrons l'existence. On va montrer en fait que :

$$\sum_{n\le N} \langle x, e_n\rangle e_n \to x \qquad\qquad \text{quand } N \to +\infty$$

En effet, pour tout N, $\sum\limits_{n\le N} \langle x, e_n\rangle e_n$ est la projection de x sur $\mathrm{Vect}\,\{e_0, ..., e_N\}$ donc :

$$\left|\left| x - \sum_{n\le N} \langle x, e_n\rangle e_n \right|\right| = d(x, \mathrm{Vect}\,\{e_0, ..., e_N\})$$

Comme $E = \overline{\mathrm{Vect}\,\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$, on a que $d(x, \mathrm{Vect}\,\{e_0, ..., e_N\}) \to 0$ quand $N \to +\infty$. Donc $\sum\limits_{n\le N} \langle x, e_n\rangle e_n \to x$.
Montrons maintenant l'unicité, c'est-à-dire montrons qu'on a nécessairement $\alpha_n(x) = \langle x, e_n\rangle$ pour tout n.
Puisque $\sum\limits_{n\le N} \alpha_n(x) e_n \to x$ et $\sum\limits_{n\le N} \langle x, e_n\rangle e_n \to x$, on doit avoir :

$$\left|\left| \sum_{n\le N} \alpha_n(x) e_n - \sum_{n\le N} \langle x, e_n\rangle e_n \right|\right| \to 0$$

Puisque $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée :

$$\left|\left| \sum_{n\le N} \alpha_n(x) e_n - \sum_{n\le N} \langle x, e_n\rangle e_n \right|\right| = \sqrt{\sum_{n\le N} |\alpha_n(x) - \langle x, e_n\rangle|^2}$$

La convergence de ce nombre vers 0 implique que $\alpha_n(x) = \langle x, e_n\rangle$ pour tout n.
3. Cette application est linéaire. Il faut montrer que c'est une isométrie et qu'elle est surjective.
Montrons que c'est une isométrie.
Pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned}
||x|| &= \lim_{N\to+\infty} \left|\left|\sum_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n\right|\right| \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sqrt{\sum_{n\leq N} |\alpha_n(x)|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n(x)|^2} \\
&= ||(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}||_2 = ||\phi(x)||_2
\end{aligned}$$

Montrons que ϕ est surjective.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$. Posons $u_N = \sum\limits_{n\leq N} x_n e_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. La suite (u_N) est de Cauchy. En effet, pour tous N, M avec $N < M$:

$$\begin{aligned}
||u_N - u_M|| &= \left|\left|\sum_{n=N+1}^{M} x_n e_n\right|\right| \\
&= \sqrt{\sum_{n=N+1}^{M} x_n^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{n=N+1}^{+\infty} x_n^2} \\
&\to 0 \quad \text{quand } N \to +\infty
\end{aligned}$$

On peut donc poser $x = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n\leq N} x_n e_n$. On a $\phi(x) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 ✐✐ : hyperplan fermé d'orthogonal réduit à $\{0\}$

1. a) Non. Il est seulement préhilbertien. En effet, soit, pour tout n, $u_n = 2^{-n}\delta_n$ (c'est-à-dire la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième qui vaut 2^{-n}).
Pour tout n, $||u_n|| = 2^{-n}$ donc la suite $\sum\limits_n u_n$ est normalement convergente : $\sum\limits_n ||u_n|| = 2 < +\infty$.
Pourtant, $\left(\sum\limits_{n\leq N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $c_{00}(\mathbb{N})$: si elle admettait une limite u_∞, la coordonnée n de u_∞ devrait être égale à 2^{-n} pour tout n donc u_∞ ne serait pas nulle à partir d'un certain rang.
b) L'application f est continue. En effet, pour tout u, par Cauchy-Schwarz :

$$|f(u)| = \left|\sum_n \frac{u_n}{2^n}\right| \leq \sqrt{\left(\sum_n u_n^2\right)} \cdot \sqrt{\left(\sum_n 2^{-2n}\right)} = \sqrt{\frac{4}{3}}||u||$$

L'ensemble $\text{Ker}\,(f) = f^{-1}(\{0\})$ est donc fermé dans $c_{00}(\mathbb{N})$.
Montrons que $(\text{Ker}\,(f))^{\perp} = \{0\}$. Soit $u \in (\text{Ker}\,(f))^{\perp}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$ pour tout $n > N$.
Définissons $v \in c_{00}(\mathbb{N})$ de la manière suivante :

- Pour tout $n \leq N$, $v_n = u_n$.
- $v_{N+1} = -2^{N+1}.\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}v_n\right)$
- Pour tout $n > N+1$, $v_n = 0$.

La suite v appartient au noyau de f :

$$f(v) = \sum_{n\leq N} 2^{-n}v_n + 2^{-(N+1)}v_{N+1} = 0$$

La suite v est donc orthogonale à u :

$$0 = \langle u, v\rangle = \sum_{n\leq N} u_n v_n = ||u||^2$$

Donc $u = 0$.
2. Soit E_c le complété de E, qui est un espace de Hilbert. Soit $x_0 \in E_c - E$. Posons $F_c = \{x_0\}^{\perp}$ et $F = E \cap F_c$. Puisque F_c est fermé dans E_c, F est fermé dans E. De plus, F est un sous-espace vectoriel strict de E (sinon x_0 est orthogonal à E, donc à E_c par continuité, ce qui est absurde). Montrons que $F^{\perp} = \{0\}$ dans E. Soit, par l'absurde, $u \in F^{\perp}$ tel que $u \neq 0$. On n'a pas $\langle u, x_0\rangle = 0$, sinon on aurait $u \in F$ donc $u \perp u$. Pour tout $v \in E$, $v - \frac{\langle v,x_0\rangle}{\langle u,x_0\rangle}u \perp x_0$ donc :

$$\left(\langle u, v - \frac{\langle v, x_0\rangle}{\langle u, x_0\rangle}u\rangle = 0\right) \Rightarrow \left(\langle v, \frac{\langle u, x_0\rangle}{||u||^2}u\rangle = \langle v, x_0\rangle\right)$$

Comme E est dense dans E_c, la dernière égalité est en fait vraie pour tout $v \in E_c$, ce qui implique :

$$\frac{\langle u, x_0\rangle}{||u||^2}u = x_0$$

C'est impossible car $x_0 \notin E$ et $u \in E$.

Exercice 3 : opérateurs compacts et propriété d'approximation
Soit E et F des espaces de Banach. On dit qu'un opérateur continu $T : E \to F$ est *compact* si l'image par T de toute partie bornée est relativement compacte.

1. Montrer qu'un opérateur est compact si et seulement si l'image de la boule unité est relativement compacte.

2. Si A et B sont deux opérateurs continus, montrer que l'opérateur $A \circ B$ est compact dès que l'un des opérateurs A ou B est compact. (on a évidemment rajouté un troisième Banach)

3. Montrer que les opérateurs de rang fini sont compacts.

4. Montrer que l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace des applications linéaires continues.

5. On suppose maintenant que $E = F = H$ est un espace de Hilbert. Montrer la réciproque. On dit que H a la *propriété d'approximation*.

Exercice 4 : dual de l^p

1. a) La fonction L_v est bien définie car, si $v \in l^q$ et $u \in l^p$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| = ||uv||_1 \leq ||u||_p ||v||_q$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ converge donc absolument. De plus, sa limite vérifie :

$$|L_v(u)| \leq ||u||_p ||v||_q$$

L'application L_v est donc bien définie et continue : elle est de norme au plus $||v||_q$.
b) On traite le cas $p \neq 1, +\infty$. Les cas $p = 1$ ou $p = \infty$ sont similaires.
Montrons que, pour tout v, $||L_v|| = ||v||_q$. Si $v = 0$, c'est clair. On peut donc supposer $v \neq 0$.
On a vu à la question précédente qu'on avait $||L_v|| \leq ||v||_q$.
Posons $u_n = |v_n|^{q-1}\text{signe}(v_n)$. Cette suite est dans l^p car $\sum_n |u_n|^p = \sum_n |v_n|^q = ||v||_q^q$. On a $||u||_p = ||v||_q^{q/p} = ||v||_q^{q-1}$.
On a $L_v(u) = \sum_n |v_n|^q = ||v||_q^q = ||v||_q ||u||_p$. Donc $||L_v|| \geq ||v||_q$.

2. À cause de la question 1.b), il suffit de montrer que ϕ est surjective si $p \neq \infty$.
Soit $\alpha \in (l^p)'$ quelconque et montrons que $\alpha = L_v$ pour un certain v.
Pour tout n, on note $e^{(n)}$ la suite de l^p telle que :

$$\begin{aligned} e_k^{(n)} &= 0 \text{ si } k \neq n \\ &= 1 \text{ si } k = n \end{aligned}$$

Posons $v_n = \alpha(e^{(n)})$. La suite v ainsi définie est un élément de l^q. En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$, si on note $u = |v_0|^{q-1}\text{signe}(v_0)e_0 + ... + |v_N|^{q-1}\text{signe}(v_N)e_N$:

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n|^q &= \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n(|v_n|^{q-1}\text{signe}(v_n)) \\ &= \alpha(u) \\ &\leq ||\alpha||\,||u||_p \\ &= ||\alpha|| \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n|^q\right)^{1-1/q} \end{aligned}$$

donc $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n|^q\right)^{1/q} \leq ||\alpha||$. (Le raisonnement qui précède n'est valable que si $p \neq 1$ mais il s'adapte au cas $p = 1$ et donne le même résultat.)
Les fonctions α et L_v coïncident sur Vect $\{e^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Comme cet ensemble est dense dans l^p, on doit avoir $\alpha = L_v$.

3. a) Soit $V \subset l^\infty$ le sous-espace vectoriel constitué des suites convergentes. Soit $L : V \to \mathbb{R}$ l'application telle que $L(u) = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
L'application L est continue sur V car $||L(u)|| \leq ||u||_\infty$ pour tout u. On peut donc, par le théorème de Hahn-Banach, la prolonger sur l^∞ en une forme linéaire continue, qu'on note toujours L.
b) L'application L n'est pas de la forme L_v. En effet, si on définit $(e^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ comme précédemment, on a $L(e^{(n)}) = 0$ pour tout n. La seule v pour laquelle $L_v(e^{(n)}) = 0$ pour tout n est $v = 0$. Mais si $v = 0$, on a $L_v = 0 \neq L$.

Exercice 5 : un peu plus d'espaces de suites

1. Il faut prendre comme produit scalaire $u \cdot v := \sum n^{2s} u_n v_n$, qui est bien définie grâce à Cauchy-Schwarz. Pour montrer que c'est un espace de Hilbert, on peut le faire à la main, ou bien remarquer que l'application $u \in h^s \mapsto (n^s u_n) \in l^2$ fournit une isométrie bijective entre ces espaces préhilbertiens. On en déduit que h^s est bien un Hilbert lui aussi.

2. Il est clair que l'accouplement est non dégénéré : si on prend un élément orthogonal à tous les éléments de l'autre espace pour cette forme bilinéaire, on obtient sa nullité en regardant sa valeur sur les éléments de la base canonique. L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que l'inclusion $h^s \hookrightarrow (h^{-s})^*$ est continue. On montre que c'est une isométrie exactement de la même manière que pour l^p dans l'exercice précédent.

3. Comme les normes sont également décroissantes, il est clair que les inclusions sont continues. Soit $u^{(p)}$ une suite d'éléments de norme inférieure à 1 dans h^1. On veut montrer que la suite a une valeur d'adhérence dans $h^0 = l^2$. Pour tout n on a $n^2|u_n^{(p)}|^2 \leq 1$. On peut donc supposer, quitte à extraire (et en réalisant une extraction diagonale en fait), que $u_n^{(p)}$ converge vers u_n quand p tend vers l'infini. On a alors $u^{(p)} \to u$: soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\|u^{(p)} - u\|_0^2 &\leq \sum_0^N |u_n^{(p)} - u_n|^2 \ + \ \sum_{N+1}^\infty |u_n^{(p)} - u_n|^2 \\
&\leq \sum_0^N |u_n^{(p)} - u_n|^2 \ + \ 4\sum_{N+1}^\infty \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Le premier terme de la somme tend toujours vers 0 par convergence simple, et le second peut être rendu aussi petit que possible, d'où la convergence.

Exercice 6 : topologies faible et faible-étoile

1. a) Si $x_n \to x_\infty$ pour la topologie faible, alors $l(x_n) \to l(x_\infty)$ pour toute $l \in E'$ car l est continue pour la topologie faible, par définition de cette topologie.

Montrons la réciproque. Supposons que $l(x_n) \to l(x_\infty)$ pour toute $l \in E'$.
La topologie faible est la topologie engendrée par les ensembles de la forme $l^{-1}(U)$, pour $l \in E'$ et U un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, pour tous l, U, $l^{-1}(U)$ doit être un ouvert de la topologie faible, car l est continue pour cette topologie. Donc la topologie faible contient celle engendrée par les $l^{-1}(U)$.

De plus, toutes les $l \in E'$ sont continues pour la topologie engendrée par les ensembles de la forme $l^{-1}(U)$. Comme la topologie faible est la topologie la moins fine vérifiant cette propriété, les deux topologies coïncident.
Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des ouverts U de la topologie faible tels que, si $x_\infty \in U$, alors $x_n \in U$ pour tout n assez grand.
Cette famille $\mathcal{A}$ contient chaque $l^{-1}(U)$ car, si $x_\infty \in l^{-1}(U)$, alors $l(x_\infty) \in U$ donc $l(x_n) \in U$ pour tout n assez grand (car $l(x_n) \to l(x_\infty)$) et $x_n \in l^{-1}(U)$ pour tout n assez grand.
On peut vérifier que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie et par union. L'ensemble $\mathcal{A}$ contient donc la topologie engendrée par les ouverts de la forme $l^{-1}(U)$. Comme ces ouverts engendrent la topologie faible, $\mathcal{A}$ contient tous les ouverts de la topologie faible.
Donc pour tout Ω ouvert de la topologie faible, si $x_\infty \in \Omega$, $x_n \in \Omega$ pour tout n assez grand, c'est-à-dire que $x_n \to x_\infty$.
b) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} e_k^{(n)} &= 0 \text{ si } k \neq n \\ &= 1 \text{ si } k = n \end{aligned}$$

La suite $(e^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy. Elle ne converge donc pas fortement.
Montrons en revanche qu'elle converge faiblement vers 0. Soit $l \in (l^2(\mathbb{N}))'$. Puisque $l^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert, il existe $v \in l^2(\mathbb{N})$ telle que, pour toute $u \in l^2(\mathbb{N})$:

$$l(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$$

Alors $l(e^{(n)}) = v_n \to 0$.
D'après la question a), cela implique que $e^{(n)} \to 0$ pour la topologie faible.
c) Si E est de dimension infinie, les deux topologies sont différentes. En effet, aucun ouvert non-vide de la topologie faible n'est borné pour la norme : d'après le raisonnement effectué à la question a), les ouverts de la topologie faible sont des unions d'ouverts de la forme

$$l_1^{-1}(U_1) \cap ... \cap l_n^{-1}(U_n)$$

où les $l_1, ..., l_n$ appartiennent à E' et les $U_1, ..., U_n$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
Or les ensembles de la forme $l_1^{-1}(U_1) \cap ... \cap l_n^{-1}(U_n)$ sont soit vides soit non-bornés. En effet, s'ils contiennent un point x_0, ils contiennent également $x_0 + \mathrm{Ker}\,(l_1) \cap ... \cap \mathrm{Ker}\,(l_n)$. Si E est de dimension infinie, $\mathrm{Ker}\,(l_1) \cap ... \cap \mathrm{Ker}\,(l_n)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension infinie ; c'est donc un ensemble non-borné pour la norme $||.||$.
La topologie faible est donc strictement moins fine que la topologie forte.

Montrons maintenant que les topologies faible et forte coïncident si E est de dimension finie.
On peut alors supposer que $E = \mathbb{R}^s$ pour un certain $s \in \mathbb{N}$.
L'application Id : $(\mathbb{R}^s, \text{top. faible}) \to (\mathbb{R}^s, \text{top. forte})$ est continue, car chacune de ses coordonnées est une forme linéaire, donc continue pour la topologie faible. De plus, la réciproque de cette application est continue : la topologie faible est toujours moins fine que la topologie forte. Donc cette application réalise un homéomorphisme entre E muni de ses topologies faible et forte. Donc les deux topologies sont égales.

Exercice 7 ✐✐✐ : théorème de Lax-Milgram

1. Supposons que u et u' vérifient la propriété. Alors $a(u,v) = a(u',v)$ pour tout $v \in H$, soit $a(u-u',v) = 0$. En particulier, pour $v = u - u'$, on a :

$$0 \leq c||u-u'||^2 \leq a(u-u', u-u') = 0$$

donc $u = u'$.

2. a) Pour tout u, l'application $v \to a(u,v)$ est une forme linéaire continue. Par le théorème de Riesz, il existe donc un unique $A(u) \in H$ tel que $a(u,v) = \langle A(u), v\rangle$.
L'application A est linéaire.
Elle est continue. En effet, puisque a est continue, il existe $C > 0$ telle que, pour tous u, v, $|a(u,v)| \leq C||u||\,||v||$. Pour une telle constante C, on doit avoir :

$$||A(u)||^2 = \langle A(u), A(u)\rangle = a(u, A(u)) \leq C||u||\,||A(u)||$$

donc $||A(u)|| \leq C||u||$.
b) Soit $c > 0$ tel que $a(x,x) \geq c||x||^2$ pour tout $x \in H$.
Alors, pour tout u, $||A(u)||\,||u|| \geq \langle A(u), u\rangle = a(u,u) \geq c||u||^2$. Donc $||A(u)|| \geq c||u||$.
c) Soient $(A(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'image de A qui converge vers une limite $y \in H$. Montrons que $y \in \operatorname{Im} A$.
Pour tous n, m, $||x_n - x_m|| \leq \frac{1}{\gamma}||A(x_n) - A(x_m)||$. Comme la suite $(A(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (puisqu'elle converge), la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. Elle converge donc dans H vers une limite x_∞, qui vérifie $y = A(x_\infty)$. Donc $y \in \operatorname{Im} A$.
d) Puisque $\operatorname{Im} A$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, on a $\operatorname{Im} A = H$ si et seulement si l'orthogonal de $\operatorname{Im} A$ est réduit à $\{0\}$.
Soit $z \in (\operatorname{Im} A)^\perp$. Montrons que $z = 0$.
On doit avoir $\langle A(z), z\rangle = 0$, puisque $z \perp \operatorname{Im} A$, mais $\langle A(z), z\rangle = a(z,z) \geq c||z||^2$. Donc $||z|| = 0$.
Donc $\operatorname{Im} A = H$.

Concluons. Soit $\phi \in H'$. D'après le théorème de Riesz, il existe $w \in H$ tel que $\phi(v) = \langle w, v\rangle$ pour tout $v \in H$. Puisque A est surjective, il existe $u \in H$ tel que $w = A(u)$.
Pour tout $v \in H$, on a alors $\phi(v) = \langle w, v\rangle = \langle A(u), v\rangle = a(u,v)$.

Séries de Fourier

Exercice 8 🏠✐✐ : Petites questions de Fourier

1. La formule $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$ montre que si une fonction est $\mathcal{C}^\infty$, ses coefficients sont bien dans $\mathcal{S}$. Réciproquement, si l'on se donne une suite de coefficients γ, la fonction $t \mapsto \sum_n \gamma_n e^{int}$ (qui converge normalement ainsi que toutes ses dérivées) fournit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ ayant les coefficients de Fourier requis. On peut montrer que les coefficients de Fourier échangent le produit de convolution et le produit usuels chez respectivement les fonctions et les suites par un simple calcul des coefficients.

2. Ces coefficients ne sont pas dans l^2, c'est donc impossible. Par contre, la somme $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} e^{int}$ converge presque partout grâce au lemme d'Abel et définit donc une fonction mesurable et périodique, qui a donc des coefficients de Fourier ...
3. C'est une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux, périodique et normalisée, on peut donc la développer en série de Fourier, et on a convergence simple de cette dernière. Calculons ses coefficients de Fourier :

$$a_0(f) = c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f = \frac{a}{\pi},$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt) = \frac{2}{\pi}\int_0^a \cos(nt) = \frac{2\sin(na)}{n\pi}.$$

Ainsi,

$$f(t) = \frac{a}{\pi} + \sum_1^{\infty} \frac{2\sin(na)}{n\pi}\cos(nt).$$

On en déduit que

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}.$$

4. La fonction $|\sin t|$ est paire, π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On peut donc la développer en série de Fourier et on a la convergence simple de cette dernière. De même que dans la question précédente, le calcul fournit

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin t| = \frac{2}{\pi},$$

et

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|\cos(2nt) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1},$$

d'où

$$|\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}.$$

En évaluant en 0, il vient que

$$\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1},$$

d'où en remplaçant dans l'égalité, regroupant sous la même somme, et en utilisant que $1 - \cos(2nt) = 2\sin^2(nt)$:

$$|\sin t| = \frac{8}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\sin^2 nt}{4n^2-1}.$$

Exercice 9 : Théorème de Wiener

1. Si la famille des coefficients de Fourier est sommable, on a convergence normale de la série de Fourier vers la fonction, et par conséquent, l'inégalité triangulaire fournit

$$|f(t)| = |\sum c_n(f)e^{int}| \le \sum |c_n(f)| = \|f\|.$$

Il est clair que la norme est une norme.

2. Il s'agit de montrer que le produit de convolution des coefficients (qui fait de l^1 une algèbre de Banach) est bien envoyé sur le produit standard des fonctions continues dans A. Cela montre que A est une algèbre de Banach puisqu'elle est isométrique à une algèbre de Banach.

3. Si f est $\mathcal{C}^1$, la famille de ses coefficients de Fourier est sommable puisque

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f')|}{|n|} \leq \frac{1}{2}\big(\frac{1}{n^2} + |c_n(f)|^2\big).$$

De plus, on peut écrire à l'aide de Cauchy-Schwarz

$$\|f\| \leq |c_0(f)| + \sqrt{\left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}\right)(|c_n(f')|^2)} = |c_0(f)| + C\sqrt{\int_0^{2\pi} |f'|^2}$$

d'où en majorant les intégrales par les supremum des fonctions intégrées

$$\|f\| \leq \|f\|_\infty + D\|f'\|_\infty.$$

4. Si f est dans A, on a convergence absolue de la série de ses coefficients de Fourier, d'où l'existence d'un k tel que si $g = S_k f$, on a $\|f - g\| \leq \frac{1}{3}$. L'inégalité triangulaire fournit alors $\inf|g| \geq \frac{2}{3}$ puisque la norme $\|\bullet\|$ est plus fine que la norme uniforme. g est bien inversible puisqu'elle ne s'annule pas, elle a donc un inverse qui est $\mathcal{C}^1$ tout comme g, donc dans A par la question qui précède.

5. On utilise le développement de l'inverse au voisinage de l'identité : si la série de terme général $u_n := \|\left(\frac{g-f}{g}\right)^n\|$ converge, alors $1 - \frac{g-f}{g}$ est inversible, d'inverse $\sum\left(\frac{g-f}{g}\right)^n$, donc $g(1 - \frac{g-f}{g}) = f$ aussi, ce qui est exactement ce que l'on cherche. L'inégalité

$$u_n \leq \frac{1}{3^n}\|\frac{1}{g^n}\|$$

provient juste du fait que $\|f - g\| \leq \frac{1}{3}$.

6. La question 3 fournit l'inégalité

$$\|\frac{1}{g^n}\| \leq \|\frac{1}{g^n}\|_\infty + nD\|g'\|_\infty\|\frac{1}{g^{n+1}}\|_\infty.$$

Comme l'infimum de g est supérieur à $\frac{2}{3}$, on a que $\|\frac{1}{g^n}\| = O\left(n\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$, d'où $u_n = O\left(\frac{n}{2^n}\right)$ et la série de terme général u_n converge bien.

Exercice 10 : divergence des séries de Fourier de fonctions continues

1.

$$\begin{aligned}
S_n(f)(t_0) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt_0} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \left(\int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikt_0} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-t_0)} \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t-t_0) dt
\end{aligned}$$

Posons, pour tout $\epsilon > 0$, $f_\epsilon(t) = \frac{D_n(t-t_0)}{\epsilon + |D_n(t-t_0)|}$. C'est bien une fonction continue et 2π-périodique (puisque D_n est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et 2π-périodique).
Pour tout t :

$$|D_n(t-t_0)| - \epsilon \leq f_\epsilon(t) D_n(t-t_0) \leq |D_n(t-t_0)|$$

Lorsque $\epsilon \to 0$, $S_n(f_\epsilon)(t_0) \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t-t_0)| dt$.
Pour tout $\epsilon > 0$, $||f_\epsilon||_\infty \leq 1$ donc :

$$\sup_{f \in \mathcal{C}_{2\pi}} \frac{|S_n(f)(t_0)|}{||f||_\infty} \geq \sup_{\epsilon > 0} |S_n(f_\epsilon)(t_0)| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt$$

2. L'ensemble $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un espace de Banach (ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans l'espace complet $\mathbb{R}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f \to S_n(f)(t_0))$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{C}_{2\pi}$ vers $\mathcal{C}_{2\pi}$ (puisque, pour tout k et toute $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $|c_k(f)| \leq ||f||_\infty$ donc $f \to c_k(f)$ est un opérateur continu).
La famille $(f \to S_n(f)(t_0))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{C}_{2\pi}, \mathbb{R})$. En effet, d'après ce qu'on a vu à la question précédente :

$$\begin{aligned}
|||f \to S_n(f)(t_0)||| &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \right| dt \\
&\geq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin((n+1/2)t)}{t} \right| dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi(n+1/2)} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \\
&\to +\infty
\end{aligned}$$

D'après la question 1. de l'exercice précédent, cela implique qu'il existe un G_δ-dense $G \subset \mathcal{C}_{2\pi}$ tel que, pour toute $f \in G$:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(t_0)| = +\infty$$

Pour toute $f \in G$, $(S_n(f)(t_0))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

Exercice 11 : théorème de Dirichlet

Soit f une fonction 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, on note $f(x^-)$ et $f(x^+)$ les limites à gauche et à droite de $f(x)$, quand t tend vers x. Notons

$$(S_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$$

les séries de Fourier partielles de f. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout x, $(S_n f)(x) \to \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)) =: \tilde{f}(x)$, quand n tend vers l'infini.

1. C'est un simple calcul : on remplace les coefficients de Fourier par leur expression, on permute la somme finie avec l'intégrale, et on s'aperçoit que la somme des e^{int} vaut exactement $D_n(t)$.

2. Le noyau de Dirichlet $D_n(t)$ est réel et pair. On casse l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(x-t)D_n(t)dt$ en une intégrale entre 0 et π et une intégrale entre π et 2π. Le changement de variable $t' = -t$ dans la deuxième intégrale et la 2π-périodicité donne

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t)(f(x-t) + f(x+t))dt.$$

On a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t)dt = 1/2$. En effet, l'intégrale sur $[0, 2\pi]$ vaut 1 (utiliser l'expression en somme d'exponentielles) ; par parité elle vaut 1/2 sur une demie-période. On peut alors faire entrer $\tilde{f}(x)$ dans l'intégrale et on obtient la formule annoncée.

3. Le facteur de droite dans l'intégrale est continu en dehors de 0. En 0, on a $\sin(t/2) \sim t/2$, $f(x+t) - f(x^+) = tf'(x^+) + o(t)$ et $f(x-t) - f(x^-) = -tf'(x^-) + o(t)$, par définition d'une dérivée à gauche ou à droite. Donc le facteur de droite admet la limite $2(f'(x^+) - f'(x^-))$ quand t tend vers 0. En particulier, c'est une fonction continue et on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue (puisque $\sin(x)$ est la partie imaginaire de e^ix).

Exercice 12 : théorème de Fejér

1. La formule intégrale résulte simplement de la définition du noyau de Dirichlet et la formule intégrale donnée à la première question de l'exercice précédent. Il s'agit donc de montrer la deuxième expression du noyau de Fejér. On rappelle que $D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}$.

$$\begin{aligned}
F_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2} \\
&= \frac{1}{(n+1)\sin t/2} \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+1/2)t} \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)\sin t/2} \mathrm{Im}\left(e^{it/2} \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)\sin t/2} \mathrm{Im}\left(e^{i(n+1)t/2} \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin t/2} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2 (n+1)t/2}{\sin^2 t/2} \\
F_n(t) &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1 - \cos(n+1)t}{1 - \cos t}.
\end{aligned}$$

2. La positivité est claire, vue la deuxième expression trouvée pour le noyau de Fejér. La valeur moyenne se calcule à partir de l'expression comme somme de noyaux de Dirichlet. Considérons maintenant $\delta > 0$. Si $t \in [-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$, on a $F_n(t) \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1-\cos(\delta)}$. Donc

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} F_n(t)dt \leq 2(\pi - \delta)\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1-\cos(\delta)},$$

et donc l'intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

3. On a $(C_nf)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t) - f(x))F_n(t)dt$. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité uniforme de f, soit $\delta > 0$ tel que si $|t| \leq \delta$, alors $|f(x-t) - f(x)| \leq \epsilon/$. Soit N tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} F_n(t)dt \leq \frac{\epsilon}{4||f||_\infty}$. Alors, si $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
|(C_nf)(x) - f(x)| &= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{\delta}^{\delta}(f(x-t) - f(x))F_n(t)dt + \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]}(f(x-t) - f(x))F_n(t)dt\Big) \\
&\leq \epsilon/2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(t)dt + 2||f||_\infty\frac{\epsilon}{4||f||_\infty} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$