Td n° 9 d'Analyse fonctionnelle

Intégrales singulières

Séance du 12 avril 2013

Exercice 1. *Transformation de Riesz*

1. Soit $m(x) = (m_1(x), .., m_n(x))$, où $m_i(x)$ sont des fonctions homogénes de degré 0, tel que pour toute matrice orthogonale A on ait $m(A(x)) = A(m(x))$. Montrer qu'il existe C constante telle que $m(x) = c\frac{x}{|x|}$.

On introduit les distributions tempérées $W_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ définies par

$$< W_j, \phi >= \frac{n-1}{\pi|\mathbb{S}^{n-2}|} \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{|y|\geq\epsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\phi(y).$$

On définit alors, pour $f \in \mathcal{S}$ les transformées de Riesz $R_j(f)$ par

$$R_j(f) = f * W_j.$$

2. Montrer que $\mathcal{F}(R_j(f))(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}(f)(\xi)$

Indication : On pourra utiliser $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

3. Montrer que la transformation de Riesz se prolonge en un opérateur de $\mathcal{L}(L^p, L^p)$ pour $1 < p < \infty$.

Indication : On pourra utiliser que la transformation de Hilbert est un opérateur de $\mathcal{L}(L^p, L^p)$ pour $1 < p < \infty$.

4. Soit $1 < p < \infty$. On considére une solution distributionnelle u de $\Delta u = f$, avec $f \in L^p$. Montrer que $\partial_i\partial_j f \in L^p$.

⋆

Exercice 2. *Théorème de Marcinkiewicz*

Soit Ω un espace mesuré. On note, pour f mesurable, $[f]_\infty = \|f\|_{L^\infty}$ et pour $p \in [1, \infty[$,

$$[f]_p^p = \sup_{\lambda\geq 0} \lambda^p \mu\{x| \, |f(x)| \geq \lambda\}.$$

1. Se rappeler pourquoi

$$\|f\|_{L^p}^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu\{x| \, |f(x)| \geq \lambda\}d\lambda,$$

2. Montrer que $[f]_p \leq \|f\|_{L^p}$.

On dit qu'un opérateur T est de type (p, q)-faible si pour tout $f \in L^p$, Tf est mesurable et s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall f \in L^p, \qquad [Tf]_q \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Il est de type (p, q)-fort si $\|Tf\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$.

On souhaite montrer le résultat suivant.

Soit $1 \leq p < q \leq \infty$, et T un opérateur *sous-additif* (i.e $|T(f+g)| \leq |Tf|+|Tg|$) de type (p,p)-faible et de type (q,q)-faible. Alors pour tout $r \in]p,q[$, T est de type (r,r)-fort.

Soit donc $f \in L^r$, et $a > 0$. On pose $g_\lambda = f\mathbb{1}_{|f|>a\lambda}$, $h_\lambda = f\mathbb{1}_{|f|\leq a\lambda} = f - g_\lambda$.

3. Montrer que

$$\mu\{x|\,|Tf|(x) \geq \lambda\} \leq \mu\{x|\,|Tg_\lambda|(x) \geq \lambda/2\} + \mu\{x|\,|Th_\lambda|(x) \geq \lambda/2\}.$$

4. En déduire que si $q < \infty$,

$$\|Tf\|_{L^r}^r \leq C\int_0^\infty \lambda^{r-1-p}[Tg_\lambda]_p^p d\lambda + C\int_0^\infty \lambda^{r-1-q}[Th_\lambda]_q^q d\lambda.$$

5. Conclure que $\|Tf\|_{L^r} \leq C\|f\|_{L^r}$. Que vaut C quand on optimise a ?
6. Conclure dans le cas $q = \infty$.

⋆

Exercice 3. *Autour de la fonction maximale de Lebesgue*

Pour tout borélien A, on note $|A|$ sa mesure de Lebesgue.

1. Soit Ω l'union d'une famille $\mathcal{B}$ de boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$ et $c < |\Omega|$. Montrer qu'il existe une suite finie $B_1, ..., B_k$ de boules disjointes de $\mathcal{B}$ telle que :

$$c < 3^n \sum_{i=1}^k |B_j|.$$

C'est le lemme de recouvrement de Vitali.

Pour toute fonction mesurable f appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et tout $r > 0$ on pose :

$$M_r f(x) := \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy.$$

La fonction maximale associée à f est définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$Mf(x) = \sup_{r>0} M_r|f|(x).$$

2. Montrer que M est de type $(1,1)$-faible et vérifie pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$[Mf]_1 \leq 3^n\|f\|_{L^1}.$$

En déduire que M est de type (p,p)-fort pour tout $1 < p < +\infty$.

Indication : On pourra utiliser le recouvrement de Vitali sur $S = \{x, M|f| \geq \lambda\}$.

3. Montrer que pour toute fonction mesurable $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{r\to 0^+} M_r f(x) = f(x).$$

(on pourra commencer par le cas où $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$)

C'est le fameux théorème de différentiation de Lebesgue.

Remarque : en fait, si $f \in L^p$, on a pour presque tout x_0 dans $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} |f(x) - f(x_0)|^p dx \to_{r\to 0} 0.$$

4. Montrer que M n'est pas $(1,1)$ fort.
Indication : On pourra considérer des fonctions indicatrices.

⋆

Exercice 4. *Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev*

1. Soit $1 < p < q < +\infty$ et $0 < \lambda < n$. Si :

$$\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{N} = 1 + \frac{1}{q}$$

Montrer qu'il existe $c_1 > 0$ (dépendant uniquement de n) tel pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{|y-x|<\delta} |u(y)||x-y|^{-\lambda} dy \leq c_1 \delta^{n-\lambda} Mu(x)$$

où Mu est la fonction maximale associée à u.

2. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\left\| |x|^{-\lambda} * u \right\|_{L^q} \leq c \|u\|_{L^p}.$$

(c'est l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev)

3. Soit $n \geq 3$. On pose :

$$2^* = \frac{2n}{n-2}$$

Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, on ait :

$$\|u\|_{L^{2^*}} \leq C \sum_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}.$$

(c'est l'inégalité de Sobolev)

⋆