Td n° 9 d'Analyse fonctionnelle

Semi-groupes et EDP

Séance du 2 mai 2014

Exercice 1. *Préliminaires*

On considère l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(t,x) \cdot \nabla_x u = 0, \quad x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n, u(0) = u_0. \qquad (*)$$

où $u : [0, \infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et bornée. Soit $X = X(t,y)$ la solution de **l'équation des caractéristiques** :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t,y) = f(t, X(t,y)) \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ X(0,y) = y \text{ dans } \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (1)$$

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, l'application $x \to X(t,x)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ est solution de $(*)$, alors $u(t, X(t,x)) = u_0(x)$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

3. En déduire la solution de classe $\mathcal{C}^1$ de l'équation $(*)$ en fonction de X.

4. **Principe de Duhamel** On s'intéresse maintenant à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(t,x) \cdot \nabla_x u = h(t,x), \quad u(0) = 0.$$

Montrer que $u(x,t) = \int_0^t v(s,t,x) ds$ est solution, où $v(s,t,x)$ est la solution de

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f(t,x) \cdot \nabla_x v = 0, \quad v(s,s,x) = h(s,x).$$

⋆

Exercice 2. *Sommme de générateurs*

Soient E un espace de Banach, A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur E et $B \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur continu sur E.

1. On fixe $f \in E$. Montrer que l'équation

$$v + B(A + \lambda)^{-1} v = f$$

admet une unique solution $v \in E$ lorsque λ est assez grand.

2. En déduire que l'opérateur $A+B$, défini par $(A+B)u = Au + Bu$ pour tout $u \in D(A)$, est le générateur d'un semi-groupe $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$. Donner une majoration de $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$.

⋆

Exercice 3. *Equation cinétique*

Pour tout $t \geq 0$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ on note $S(t)f(x,v) = f(x - tv, v)$.

1. Montrer que pour tout $p \geq 1$, la fonction S définit un semi-groupe de contractions sur $L^p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ dont on déterminera le générateur infinitésimal.

2. Soient $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ et $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'il existe une unique solution $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ de l'équation :

$$\partial_t f(t,x,v) + v \cdot \nabla_x f(t,x,v) + m(x,v) f(t,x,v) + \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(w) f(t,x,v-w) dw = 0$$

posée dans $\mathcal{D}'((0,+\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ et vérifiant $f(0,x,v) = f_0(x,v)$.

3. S'il existe $b > a > 0$ tels que $m(x,v) \in [a,b]$ pour presque tout $(x,v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, donner une condition sur les paramètres $\|\sigma\|_1$, a, b pour qu'existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|f(t,\cdot,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \leq e^{-ct} \|f_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)}\,, \qquad t \geq 0\,.$$

⋆

Exercice 4. *Comportement en temps grand de solutions de l'équation de la chaleur*

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g \in C^\infty(\partial\Omega)$, et $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ vérifiant $u_0(x) = g(x)$ pour tout $x \in \partial\Omega$. On admettra l'existence d'au moins une solution $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x) & \text{dans } \Omega \times (0,\infty)\,, \\ u(x,t) = g(x) & \text{sur } \partial\Omega \times [0,\infty)\,, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega\,. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il n'existe qu'une seule solution de classe $C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ cette équation.

2. Montrer qu'il existe une unique solution $u_* \in C^2(\overline{\Omega})$ de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u_* = f & \text{dans } \Omega\,, \\ u_* = g & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

3. On pose $v(x,t) := u(x,t) - u_*(x)$. Montrer que $t \mapsto \|v(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$ est décroissante, et que $|\nabla v| \in L^2(\Omega \times (0,\infty))$.

4. Montrer que $t \mapsto \|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$ est décroissante, et que $\lim_{t\to\infty} \|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

5. En déduire que la fonction $u(\cdot,t) : x \mapsto u(x,t)$ converge vers u_* dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to \infty$.

⋆

Exercice 5. *Principe du maximum parabolique.*

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $T > 0$. On pose $Q_T := \Omega \times]0,T]$ et $\Gamma_T := \overline{Q}_T \setminus Q_T$. Soient $a, b_1, \ldots, b_n$, et c des fonctions continues sur $\overline{Q_T}$ satisfaisant $a(x,t) > 0$ et $c(x,t) \geq 0$ dans $\overline{Q_T}$. Soit $u \in C^{2,1}(\overline{Q_T}) \cap C^0(\overline{Q_T})$ telle que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x,t)\Delta u + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t) u \leq 0 \quad \text{dans } Q_T\,.$$

1. On suppose que $c \equiv 0$. Montrer que $\max_{\overline{Q}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u$.

2. Si $c \not\equiv 0$, montrer que $\max_{\overline{Q}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+$, où $u^+ := \max(u,0)$.

⋆