Analyse fonctionnelle
TD n° 9

Valeurs propres du Laplacien

Séance du 27 mars 2017

Préliminaires. Soit $d \geq 1$ et Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$. À partir de l'exercice 2, on supposera de plus Ω borné et connexe.

Dans ce TD, on introduit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme étant le complété de l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω et à valeurs dans $\mathbb{C}$, pour la norme

$$\|u\|_{H_0^1} := \left(\int_\Omega |u|^2 + \sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier, $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u\bar{v} + \nabla u \cdot \nabla v,$$

où le point désigne le produit scalaire hermitien standard sur $\mathbb{C}^d$.

On admettra que si Ω est borné, l'inclusion de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

Exercice 1. *Inégalité de Poincaré*

1. Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(]a,b[)$ à support compact. En écrivant $|u(x)|^2$ comme une intégrale, montrer que

$$\|u\|_{L^2([a,b])} \leq 2|b-a| \|u'\|_{L^2([a,b])}.$$

2. Soit $\Omega =]a,b[\times \mathbb{R}^{d-1}$. Déduire de la question précédente qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 2|b-a| \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

On admettra que cette inégalité reste vraie pour tout ouvert régulier, borné dans au moins une direction (*i.e.* tel qu'à rotation près de Ω, il existe $R > 0$ tel que $\Omega \subset]-R, R[\times \mathbb{R}^{d-1}$).

⋆

Exercice 2. *Diagonalisation du Laplacien de Dirichlet*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, borné, connexe et régulier.

1. En utilisant le théorème de Lax-Milgram et le résultat de l'exercice précédent, montrer que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in H_0^1$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\bar{v}.$$

On dira alors que u est solution faible du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2. Montrer que l'opérateur $-\Delta^{-1} : L^2 \to L^2$ qui à f associe la solution u du problème de Dirichlet associé est autoadjoint et compact.

3. Montrer qu'il existe une suite croissante $\lambda_n \to \infty$ et une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ composée d'éléments de $H_0^1(\Omega)$, notée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$.

On admettra qu'en fait, $e_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

⋆

Exercice 3. *Autour de la première valeur propre du Laplacien*

1. Montrer que

$$\sqrt{\lambda_1} = \inf_{\substack{u\in H_0^1 \\ \|u\|_{L^2}=1}} \|\nabla u\|_{L^2}.$$

En déduire que $1/\sqrt{\lambda_1}$ est la constante optimale dans l'inégalité de Poincaré, et que cet optimum est réalisé uniquement sur l'espace propre E_{λ_1} associé à λ_1.

2. Soit $g \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ telle que $-\Delta g \geq 0$. On introduit la moyenne de g sur la sphère $S(x_0, t)$ de centre $x_0 \in \Omega$ et de rayon $t < d(x, \partial\Omega)$:

$$m_{x_0}(t) = \frac{1}{|S(x_0,t)|} \int_{S(x_0,t)} g(y)d\sigma(y),$$

où $d\sigma(y)$ est la mesure de Lebesgue sur $S(x_0, t)$. Montrer que $t \mapsto m_{x_0}(t)$ est une fonction décroissante.

Indication : On pourra utiliser la formule de Green : si ω est un ouvert régulier

$$\int_\omega -\bar{v}\Delta u = \int_\omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\omega} \bar{v}\nabla u \cdot \vec{\nu} d\sigma,$$

où $\vec{\nu}(y)$ est la normale sortante à ω en $y \in \partial\omega$.

3. En déduire que si $g \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ est telle que $-\Delta g \geq 0$ et $g = 0$ sur $\partial\Omega$, alors ou bien $g > 0$ sur Ω, ou bien $g \equiv 0$.

4. En utilisant le théorème de Krein-Rutman (cf. TD n° 6) dans l'espace des fonctions continues s'annulant sur $\partial\Omega$, montrer que l'espace propre associé à la première valeur propre est de dimension 1, et qu'un vecteur propre e_1 associé à λ_1 est de signe constant sur Ω.

5. Montrer que si $\Omega = B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$, alors e_1 est à symétrie sphérique.

⋆

Exercice 4. *Estimation de Weyl*

1. (*Principe du min-max.*) Montrer que

$$\lambda_n = \min_{\substack{V\subseteq H_0^1(\Omega) \\ \dim(V)\geq n}} \max_{\substack{u\in V \\ \|u\|_{L^2}=1}} \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

2. En déduire que si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ sont deux ouverts connexes bornés, $\lambda_n(\Omega_2) \leq \lambda_n(\Omega_1)$. On note $N_\Omega(\lambda) = \#\{\lambda_n(\Omega) \leq \lambda\}$. Montrer que

$$N_{\Omega_2}(\lambda) \geq N_{\Omega_1}(\lambda).$$

3. Quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres associés quand $\Omega =]0,a[^d$?
Indication : On pourra utiliser la décomposition en série de Fourier, et/ou une technique de séparation des variables.

4. En déduire une estimation de $N_{]0,a[^d}(\lambda)$ quand $\lambda \longrightarrow \infty$.

5. En écrivant un ouvert borné Ω comme la limite d'ouverts constitués de petites briques $[0,a]^d$ avec a de plus en plus petit, montrer que

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} \frac{N_\Omega(\lambda)}{\lambda^{\frac{d}{2}}} \geq |\Omega| \frac{c_d}{(2\pi)^d}$$

où c_d est le volume de la boule unité en dimension d.

⋆

Exercice 5. *Problème de Neumann*

Soit Ω' un ouvert tel que $\bar{\Omega} \subset \Omega'$. On définit $H^1(\Omega)$ comme la restriction à Ω des éléments de $H^1_0(\Omega')$. $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u\bar{v} + \nabla u \cdot \nabla v.$$

1. En utilisant le théorème de Lax-Milgram, montrer que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int u\bar{v} + \nabla u \cdot \nabla v = \int f\bar{v}.$$

On dira alors que u est solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ sur } \Omega \\ \vec{\nu} \cdot \nabla u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où on note $\vec{\nu}$ le vecteur normal au bord de Ω.

2. Montrer qu'il existe une suite croissante $\lambda_n^N \to \infty$ et une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, notée $\{e_n^N\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta e_n^N = \lambda_n^N e_n^N \text{ sur } \Omega \\ \vec{\nu} \cdot \nabla e_n^N = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

3. Montrer que

$$\lambda_n^N = \min_{\substack{V\subseteq H^1 \\ \dim(V)\geq n}} \max_{\substack{u\in V \\ \|u\|_{L^2}=1}} \|\nabla u\|^2.$$

⋆

Exercice 6. *Estimation de Weyl précisée*

On note λ_n^D les valeurs propres associées au problème de Dirichlet, et λ_n^N celles associées au problème de Neumann. On note $N_\Omega^N(\lambda) = \#\{\lambda_n^N(\Omega) \leq \lambda\}$ et $N_\Omega^D(\lambda) = \#\{\lambda_n^D(\Omega) \leq \lambda\}$.

1. Montrer que $N_\Omega^D(\lambda) \leq N_\Omega^N(\lambda)$.
2. En suivant la même démarche que dans l'exercice 4, montrer que
$$\limsup_{\lambda \to +\infty} \frac{N_\Omega^N(\lambda)}{\lambda^{\frac{d}{2}}} \leq |\Omega| \frac{c_d}{(2\pi)^d}.$$
3. En déduire que
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{N_\Omega^D(\lambda)}{\lambda^{\frac{d}{2}}} = |\Omega| \frac{c_d}{(2\pi)^d}.$$

⋆