

Analyse fonctionnelle

TD n° 9

CONVOLUTION DES DISTRIBUTIONS

Séance du 1er avril 2019

Exercice 1. *Échauffement*

1. Soit $H = \mathbb{1}_{x \geq 0}$. Montrer que $H' = \delta_0$.
2. Calculer les convolutions suivantes (après en avoir justifié l'existence) :

$$\delta_a * H, \delta'_0 * \mathbb{1}, (x^m \delta_0^{(n)}) * (x^p \delta_0^{(q)}), (\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'',$$

$$T * \delta_a, T * \mathbb{1}, T * \exp, \text{ où } T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}).$$

3. Trouver $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

★

Exercice 2. *Dérivées successives des fonctions test*

Soit $a > 0$. On note $H_a := \frac{1}{a}(H - \delta_a * H)$

1. Montrer que si $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, alors $u * H_a \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour $u \in L^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} u * H_a = \int_{\mathbb{R}} u$.

On considère une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, décroissante, telle que $a_n > 0$, et $\sum a_n < \infty$. On pose $u_k = H_{a_0} * \dots * H_{a_k}$.

3. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $u_k \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})$ et u_k est à support dans $[0, a_0 + \dots + a_k]$.
4. Soit $j < k$. Montrer les estimations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |u_k^{(j)}(x)| \leq \frac{2^j}{a_0 \cdots a_j},$$
$$\int_{\mathbb{R}} |u_k^{(j)}(x)| dx \leq \frac{2^j}{a_0 \cdots a_{j-1}}.$$

5. Montrer que les suites $(u_k^{(j)})_{k \in \mathbb{N}}$ sont bien définies à partir d'un certain rang, et de Cauchy dans $L^\infty(\mathbb{R})$. En déduire que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction u . Que peut-on dire de u ?

6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq 2^n (n!)^\alpha$?

★

Exercice 3. *Équations différentielles linéaires*

Soient $a_0, \dots, a_K \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. On appelle *solution fondamentale* d'une équation différentielle linéaire inhomogène

$$\sum_{k=0}^K a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

toute distribution u telle que $\sum_k a_k u^{(k)} = \delta_0$. On en déduit alors une solution pour le second membre f , en considérant $u * f$ (lorsque c 'est bien défini).

1. On introduit $\mathcal{D}'_+ = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid \text{supp}(u) \subset \mathbb{R}_+\}$. Expliquer pourquoi il est possible de convoluer deux distributions de \mathcal{D}'_+ . En déduire que \mathcal{D}'_+ forme une algèbre commutative pour $*$, d'élément neutre δ_0 .

On notera u^{*n} la n -ième puissance de u pour la convolution, pour $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in \mathbb{Z}$ si u est inversible).

2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\delta'_0 - \lambda\delta_0$ est inversible, et que :

$$(\delta'_0 - \lambda\delta_0)^{* -1} = H(t)e^{\lambda t}.$$

3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(\delta'_0 - \lambda\delta_0)^{* -n} = H(t) \frac{t^{n-1} e^{\lambda t}}{(n-1)!}$.

4. En déduire que toute équation différentielle linéaire à coefficients constants admet une solution fondamentale dans \mathcal{D}'_+ .

★

Exercice 4. Équation de Volterra

On considère l'algèbre de convolution \mathcal{D}'_+ définie dans l'exercice précédent.

1. Soient $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de distributions de \mathcal{D}'_+ qui converge vers T . Montrer que $T \in \mathcal{D}'_+$, et que si $S \in \mathcal{D}'_+$, alors $S * T_k \rightarrow S * T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Soit $K \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, avec $\text{supp } K \subseteq \mathbb{R}_+$. Pour tout $a > 0$, on pose $M_a := \sup_{y \in [0, a]} |K(y)|$. Montrer que

$$\forall x \in [0, a], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |K^{*n}(x)| \leq M_a^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

3. Montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n K^{*n}$$

converge dans \mathcal{D}'_+ . En déduire que la distribution $(\delta_0 + K)$ est inversible, d'inverse $(\delta_0 + L)$, où L est une fonction localement bornée.

4. Soit $X := L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, et $g \in X$. On veut résoudre dans X l'équation suivante, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ donné :

$$f(x) + \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f(y) dy = g(x), \quad \forall x \geq 0.$$

Montrer que l'équation équivaut à $(\delta_0 + He^{\lambda x}) * f = g$ au sens des distributions. En déduire que l'équation admet toujours une solution.

★

Exercice 5. Régularisation par polynômes

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme

$$P_k(x) = \frac{k^n}{\pi^{n/2}} \left(1 - \frac{|x|^2}{k^n}\right)^{k^{n+2}}.$$

Montrer que $P_k \rightarrow \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Indication : On pourra utiliser que, si $y \in [0, p]$, alors $\left|e^{-y} - \left(1 - \frac{y}{p}\right)^p\right| \leq \frac{1}{e^{(p-1)}}$.

2. Montrer que toute distribution de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est limite de polynômes au sens des distributions.

★