Corrigé – TD 9

Espaces $\mathbb{L}^p$, Absolue continuité et singularité de mesures

Exercice 0 (Super Hölder – convolution "$\mathbb{L}^p * \mathbb{L}^q$")**.**

1. Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est définie presque partout et que
$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$
INDICATION : $|f(x-y)g(y)| = (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(x-y)|^p)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} (|g(y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$.

2. Soit $f \in \mathbb{L}^1$ et $g \in \mathbb{L}^p$, $p \geq 1$. Montrer que pour tout $|a| < \|f\|_1^{-1}$, l'équation $h - af * h = g$ possède une unique solution dans $\mathbb{L}^p$.

Corrigé :

1. On utilise l'inégalité généralisée de Hölder
$$\left(\int f_1 f_2 f_3\right) \leq \left(\int f_1^{1/\alpha}\right)^\alpha \left(\int f_2^{1/\beta}\right)^\beta \left(\int f_3^{1/\gamma}\right)^\gamma,$$
pour $\alpha, \beta, \gamma \in]0,1[$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ici on pose $\alpha = \frac{1}{r}, \beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$ et $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$. Alors l'indication amène à
$$\int |f(x-y)g(y)| dy \leq \left(\int |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int |f(x-y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int |g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}.$$
D'où
$$\|f * g\|_r^r \leq \underbrace{\iint |f(x-y)|^p |g(y)|^q dx dy}_{=\|f\|_p^p \|g\|_q^q} \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q},$$
ce qui permet de conclure.

2. On considère l'application $\Phi \colon h \in \mathbb{L}^p \mapsto af * h + g$. D'après la question précédente
$$\|\Phi(h) - \Phi(h')\|_p \leq a\|f\|_1 \|h - h'\|_p.$$
Φ est alors une contraction de $\mathbb{L}^p$. Cet espace est complet, donc Φ admet un unique point fixe, ce qui résout la question.

Exercice 1. Soit f une fonction mesurable sur un espace mesuré $(E, \mathscr{E}, \mu)$.

1. On suppose dans cette question que $\mu(E) < \infty$, montrer que
$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à shen.lin@ens.fr, ou bien à passer au bureau V7.

2. On suppose dans cette question que $f \in \mathbb{L}^{p_0}(E, \mathscr{E}, \mu)$ pour au moins un $p_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer la même conclusion qu'en question 1.

3. ($\star$) On suppose ici que μ est une mesure de probabilité. La limite

$$\lim_{p \to 0^+} \|f\|_p,$$

exite-t-elle ? Si oui, à quoi est-elle égale ?

Corrigé : Soit $M > 0$ tel que $\infty > \mu(|f| > M) > 0$. Alors on a

$$\|f\|_p \geq M \cdot \mu(|f| > M)^{\frac{1}{p}} \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} M.$$

En conséquence on a $\liminf_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$.

1. Dans le cas de la mesure finie, l'inégalité $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \cdot \mu(E)^{\frac{1}{p}}$ permet de conclure.

2. S'il existe $p_0 > 0$ avec $f \in \mathbb{L}^{p_0}$, alors pour $p > p_0$ la majoration

$$|f|^p \leq \|f\|_\infty^{p - p_0} |f|^{p_0}$$

implique que

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty^{1 - \frac{p_0}{p}} \|f\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p}} \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty.$$

3. Oui, si l'on suppose que $f \in \mathbb{L}^{p_0}(E, \mathscr{E}, \mu)$ pour un $p_0 \in \mathbb{R}_+^*$, la limite existe et vaut

$$\lim_{p \to 0^+} \|f\|_p = \exp\left(\int \ln(|f|) d\mu \right).$$

Nous ne corrigerons pas cette question.

Pour l'exercice suivant on pose, pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\Phi(f)(u) = (2\pi)^{-n/2} \widehat{f}(u) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle u, x \rangle} f(x) d\lambda_n(x), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n,$$

qui est la transformée de Fourier, à une constante multiplicative près. On pose également

$$\Psi(f)(u) = (2\pi)^{-n/2} \widehat{f}(-u) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle u, x \rangle} f(x) d\lambda_n(x), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

On rappelle que Φ est une bijection de la classe de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sur elle-même et sa réciproque est Ψ.

Exercice 2 (Théorème de Plancherel – Transformée de Fourier des fonctions $\mathbb{L}^2$)**.** Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même coïncidant avec la transformée de Fourier Φ sur $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$. On la note également Φ. De plus, vérifier que Φ est isométrique pour $\| \cdot \|_2$, c'est-à-dire

$$\forall f, g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n), \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(f) \overline{\Phi(g)} \, d\lambda_n \,,$$

et que Φ est bijective et sa réciproque coïncide avec Ψ sur $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Corrigé : Comme $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, il suffit de vérifier en utilisant Fubini que

$$\forall f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \Phi(f), g \rangle = \langle f, \Psi(g) \rangle.$$

Sinon, voir le Théorème 3.3.29 du polycopié de cours.

Exercice 3 (Quantification de l'absolue continuité)**.** Soient μ et ν deux mesures positives sur un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$.

1. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathscr{E}$,

   $$\mu(A) \leq \eta \;\Rightarrow\; \nu(A) \leq \varepsilon.$$

   Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ.

2. Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où la mesure ν est finie.

3. Que se passe-t-il si ν est infinie?

Corrigé :

1. Soit $A \in \mathscr{E}$ tel que $\mu(A) = 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\nu(A) \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $\nu(A) = 0$.

2. On suppose que l'assertion n'est pas vérifiée. Soient $\varepsilon > 0$ et une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ tels que, pour tout $n \geq 1$, $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ et $\nu(A_n) \geq \varepsilon$. Notons $B_n = \cup_{k \geq n} A_k$ pour tout $n \geq 1$ et $B = \cap_{n \geq 1} B_n$. Alors d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a $\mu(B) = 0$, puis $\nu(B) = 0$. Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, on a $\nu(B_n) \geq \nu(A_n) \geq \varepsilon$. Et la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion. La mesure ν étant finie, on en déduit que

   $$\nu(B) = \lim_{n \to \infty} \nu(B_n) \geq \varepsilon,$$

   ce qui est contradictoire.

   ATTENTION : on ne peut pas dire que ν a une densité par rapport à μ: μ n'étant pas nécessairement sigma-finie, on ne peut pas utiliser le théorème de Radon-Nikodym.

3. Lorsque ν est infinie, il est facile de construire un contre-exemple (par exemple prendre μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, ν une mesure absolument continue par rapport à μ avec une densité non intégrable, par exemple $x \mapsto e^x$).

Exercice 4. Soit $(g_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions continues positives sur $I = [0, 1]$. On note λ la mesure de Lebesgue sur I et μ une mesure positive borélienne sur I telle que

1. $\lim_n g_n(x) = 0$ λ-p.p.
2. $\int_I g_n d\lambda = 1$ pour tout $n \geq 1$.
3. $\lim_n \int_I f g_n d\lambda = \int_I f d\mu$ pour tout $f \in \mathcal{C}(I)$.

Peut-on en déduire que μ est étrangère à λ ?

Corrigé : Non ! Considérer la fonction g_n qui interpole linéairement les points

$$(0,0);(\frac{1}{n^3},n^2);(\frac{2}{n^3},0);(\frac{1}{n},0);(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3},n^2);(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3},0)...(1-\frac{1}{n},0);(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3},n^2);(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3},0);(1,0).$$

Alors cette suite de fonctions vérifient les hypothèses avec $\mu = \lambda$.

Exercice 5 (Opérateur adjoint)**.** Soit H un espace de Hilbert et $T\colon H \to H$ une application linéaire continue. On rappelle que $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|;\ \|x\| = 1\}$.

1. Prouver que $\|T\| = \sup\{|\langle T(x), y\rangle|;\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$.
2. Prouver qu'il existe une unique application linéaire $T^*\colon H \to H$ telle ques les trois propriétés suivantes soient vérifiées :
   (a) $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$ pour tous $x, y \in H$,
   (b) $\|T\| = \|T^*\|$,
   (c) $(T^*)^* = T$.

   L'application linéaire continue T^* est appelée *adjoint* de T.
3. Si $T = T^*$ (on dit que T est auto-adjoint ou symétrique), prouver que

$$\|T\| = \sup\{|\langle T(x), x\rangle|;\ \|x\| = 1\}.$$

Corrigé :

1. Tout d'abord, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que $|\langle T(x), y\rangle| \leq \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$, ce qui implique que $\|T\| \geq \sup\{|\langle T(x), y\rangle|;\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$.

   Réciproquement, supposons que $\sup\{|\langle T(x), y\rangle|;\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \leq M$ et montrons que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ pour tout $x \in H$. On peut supposer $T(x) \neq 0$ et $x \neq 0$. Alors $x/\|x\|$ et $T(x)/\|T(x)\|$ sont de norme 1, ce qui implique que $\|T(x)\|/\|x\| = \langle T(x/\|x\|), T(x)/\|T(x)\|\rangle| \leq M$, d'où le résultat.

2. On remarque que la forme linéaire $x \mapsto \langle T(x), y\rangle$ est continue pour tout $y \in H$, ce qui, par le théorème de Riesz-Fréchet, donne l'existence d'un unique élément z_y tel que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, z_y\rangle$. Ceci prouve l'unicité, et pour l'existence il suffit de poser $T^*(y) = z_y$.

   Pour prouver que $\|T\| = \|T^*\|$, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{|\langle T(x), y\rangle|;\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle T(x), y\rangle|;\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \\ &= \|T^*\|. \end{aligned}$$

   Pour la dernière assertion, il suffit d'écrire

$$\langle x, T(y)\rangle = \overline{\langle T(y), x\rangle} = \overline{\langle y, T^*(x)\rangle} = \langle T^*(x), y\rangle = \langle x, (T^*)^*(y)\rangle.$$

3. Posons $M = \sup\{|\langle T(x), x\rangle|;\ \|x\| = 1\}$. D'après la première question, $M \leq \|T\|$. Réciproquement, si $x, y \in H$, on a l'identité de polarisation

$$\langle T(x), y\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle\right).$$

De plus, comme $T = T^*$, $\langle T(x), x\rangle$ est réel pour tout $x \in H$ car $\langle T(x), x\rangle = \langle x, T^*(x)\rangle = \langle x, T(x)\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle}$. On en déduit que

$$\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\right).$$

Or $|\langle T(x), x, |\rangle \leq M\|x\|^2$ pour tout $x \in H$, ce qui implique

$$|\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle| \leq \frac{M}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right).$$

L'identité du parallélogramme implique alors

$$|\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle| \leq \frac{M}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Ainsi, si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$, $|\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle| \leq M$. On en déduit que $|\langle T(x), y\rangle| \leq M$ si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$ en prenant $e^{it}y$ (avec $t \in \mathbb{R}$) à la place de y.

Exercice 6 (Opérateurs de Hilbert-Schmidt)**.** Soit $K\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Lorsque pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ la fonction $T(f) = \int_{\mathbb{R}} K(\cdot, y) f(y) dy$ est bien définie dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, on dit que $T\colon \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est un opérateur intégral et que K est son noyau.

Si $K \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$, on dit que T est un *opérateur de Hilbert-Schmidt*. Dans la suite, on considère un opérateur de Hilbert-Schmidt T de noyau K.

1. Si $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ l'application $y \mapsto K(x, y) f(y)$ est intégrable.
2. Montrer que l'application linéaire T est continue et que $\|T\| \leq \|K\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}$.
3. Prouver que l'adjoint T^* de T est un opérateur intégral de noyau $(x, y) \mapsto \overline{K(y, x)}$.

Corrigé :

1. Comme $K \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$, d'après le théorème de Fubini–Tonelli, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto |K(x, y)|^2$ est intégrable. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient alors

$$\int_{\mathbb{R}} |K(x, y)||f(y)| dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |K(x, y)|^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy\right)^{1/2} < \infty.$$

2. D'après l'inégalité obtenue à la question précédente,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) dy\right|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |K(x, y)|^2 dy\right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy\right).$$

En intégrant cette inégalité par rapport à dx,on en déduit que

$$\|T(f)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})} \leq \|K\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)} \|f\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})},$$

d'où le résultat.

3. Pour $f, g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, en utilisant le théorème de Fubini (les quantités en jeu sont intégrables) on a
$$\langle T(f), g\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} K(x,y) f(y) \overline{g(x)} dx dy = \int_{\mathbb{R}} dy f(y) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} dx \overline{K(x,y)} g(x)\right)}.$$
On conclut en remarquant que $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} dy \overline{K(y,x)} g(y)$ est un opérateur intégral de noyau $(x,y) \mapsto \overline{K(y,x)}$

Pour l'exercice suivant on rappelle les deux théorèmes classiques :

- THÉORÈME D'ASCOLI : Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques compacts, et A une partie de l'ensemble $\mathcal{C}(X,Y)$ des fonctions continues de $X \longrightarrow Y$ muni de la convergence uniforme. Alors A est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X,Y)$ ($i.e.$ sa fermeture est compacte) si elle est équi-continue $i.e.$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \left(\mathrm{d}_X(x,x') \le \delta \Rightarrow \forall f \in A, \mathrm{d}_Y(f(x), f(x')) \le \varepsilon\right).$$
- PRÉ-COMPACITÉ : Soit (E,d) un espace métrique complet. Les parties $A \subset E$ relativement compactes sont exactement les parties pré-compactes $i.e.$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \exists \text{ un recouvrement de } A \text{ par } n_\varepsilon \text{ parties de diamètre } \le \varepsilon.$$

Exercice 7 (Riesz–Fréchet–Kolmogorov : un critère de compacité dans $\mathbb{L}^p$)**.** Pour $h \in \mathbb{R}$, on note τ_h l'opérateur de translation défini par $\tau_h f = f(\cdot - h)$ pour f borélienne sur $\mathbb{R}$.

On veut montrer le résultat suivant. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (avec $1 \le p < \infty$) vérifiant :

(i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega\setminus\omega)} \le \varepsilon$,

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, il existe $\delta \in]0, \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)[$ tel que $\|\tau_h f - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} < \varepsilon$ pour tous $|h| < \delta$ et $f \in \mathcal{F}$;

alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (c'est-à-dire d'adhérence compacte dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$). La notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est un ouvert tel que $\overline{\omega}$ est compact et inclus dans Ω.

1. Fixons $\varepsilon > 0$ et $\omega \subset\subset \Omega$. Soit $(\rho_n)_{n\ge1}$ une approximation de δ_0 telle que chaque ρ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de support inclus dans $[-1/n, 1/n]$. Pour $f \in \mathcal{F}$, on note $\tilde{f}$ la fonction f prolongée à tout $\mathbb{R}$ par 0.
   (a) Montrer en utilisant le théorème d'Ascoli que pour tout $n \ge 1$, la famille $\mathcal{F}_n = \{(\tilde{f} * \rho_n)_{|\omega} \colon f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$.
   (b) Montrer que pour tout n assez grand,
   $$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \le \varepsilon.$$
   (c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{F}_{|\omega}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de $\mathbb{L}^p(\omega)$ de rayon 2ε.

2. Conclure.

Corrigé :

1. Soit $M \geq \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}$ une constante.

   (a) Soit $n \geq 1$ fixé. On note $\mathcal{F}'_n = \{(\tilde{f} * \rho_n)_{|\overline{\omega}} \colon f \in \mathcal{F}\}$. Tout d'abord on a $\mathcal{F}'_n \subset \mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. De plus, pour tout $x \in \overline{\omega}$, d'après l'inégalité de Jensen (appliquée à la mesure de probabilité $\rho_n(y)dy$), on a

   $$\begin{aligned} \left|\tilde{f} * \rho_n(x)\right| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(x-y)|^p \rho_n(y)\, dy\right)^{1/p} \\ &\leq (\|\rho_n\|_\infty)^{1/p} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \\ &\leq (\|\rho_n\|_\infty)^{1/p} M. \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{F}'_n$ est une famille bornée de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. Et pour $x, x' \in \overline{\omega}$, on a

   $$\begin{aligned} |\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f} * \rho_n(x')| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)(\rho_n(x-y) - \rho_n(x'-y))dy\right| \\ &\leq \|\rho'_n\|_\infty \cdot |x-x'| \cdot \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}|\, d\lambda \\ &\leq \|\rho'_n\|_\infty \cdot |x-x'| \cdot \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \cdot \lambda(\Omega)^{1-1/p} \qquad \text{(Hölder)} \\ &= C_n|x-x'|. \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{F}'_n$ est une famille équicontinue de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. D'après le théorème d'Ascoli, $\mathcal{F}'_n$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. Or pour $g \in \mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$, on a $g_{|\omega} \in \mathbb{L}^p(\omega)$ et $\|g_{|\omega}\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \leq (\lambda(\omega))^{1/p}\|g\|_\infty$. Donc l'injection de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^p(\omega)$ est continue. Ainsi, $\mathcal{F}_n$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$.

   (b) Soit δ associé à ε et ω par la propriété (ii). Soit $n_0 \geq \delta^{-1}$. Pour $n \geq n_0$, $f \in \mathcal{F}$ et $x \in \omega$, on a

   $$\begin{aligned} \left|\tilde{f} * \rho_n(x) - f(x)\right|^p &= \left|\int_{\mathbb{R}} \left(\tilde{f}(x-y) - f(x)\right) \rho_n(y)\, dy\right|^p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left|\tilde{f}(x-y) - f(x)\right|^p \rho_n(y)\, dy \qquad \text{(Jensen)} \\ &= \int_{[-1/n,1/n]} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)\, dy, \end{aligned}$$

donc d'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)}^p &\leq \int_\omega \int_{[-1/n,1/n]} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)\, dy\, dx \\
&= \int_{[-1/n,1/n]} \left(\int_\omega |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \right) \rho_n(y)\, dy \\
&= \int_{[-1/n,1/n]} \|\tau_y f - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)}^p \rho_n(y)\, dy \\
&\leq \varepsilon^p \int_{[-1/n,1/n]} \rho_n(y)\, dy \\
&= \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

On a donc montré que pour $n \geq n_0$,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \leq \varepsilon.$$

(c) La famille $\mathcal{F}_{n_0}$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$ donc on peut la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ε. D'après la question (b), ces mêmes boules de rayon 2ε recouvrent $\mathcal{F}$.

2. Comme $\mathbb{L}^p(\Omega)$ est complet, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors par la propriété (i), il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon/2$. Et d'après la question (1), $\mathcal{F}_{|\omega}$ peut être recouvert par des boules $B(g_i, \varepsilon/2), i = 1, \ldots, k$ (de $\mathbb{L}^p(\omega)$). On note G_i les fonctions g_i prolongées à Ω par 0. Alors les boules $B(G_i, \varepsilon), i = 1, \ldots, k$ (de $\mathbb{L}^p(\Omega)$) recouvrent $\mathcal{F}$.