PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 9
CHAÎNES DE MARKOV - MESURE INVARIANTE

Exercice 1 (Existence et unicité des mesures invariantes)**.**

- Une chaîne de Markov qui est récurrente a-t-elle une mesure invariante ? Réciproque ?
- Si une chaîne de Markov a une mesure invariante finie, est-elle récurrente ?
- Une chaîne de Markov admet-elle toujours une mesure invariante (non nulle) ?
- Et si elle est irréductible ?
- Si il existe une mesure invariante (non nulle), est-elle unique ?

Correction :

1. Oui pour la première question, non pour la réciproque.. Comme contre-exemples, considérez la marche sur $\mathbb{Z}^3$ (a une mesure invariante mais est transiente).

   Après, les réponses sont toujours non :

2. Prenons une chaîne de Markov qui n'st pas irréductible par exemple une chaîne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \uplus \mathbb{Z}^3$, qui est la marche aléatoire simple sur ces deux sous ensembles. La mesure $\mu(\overline{x}) = \frac{1}{n}$ pour $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mu(y) = 0$ pour $y \in \mathbb{Z}^3$ est une proba invariante, mais la chaîne de Markov n'est pas récurrente partout.
3. La marche sur $\mathbb{Z}$ avec $Q(i, i+1) = 1$ sur $\{0, 1, 2, ...\}$ n'a pas de mesure invariante non nulle.
4. On peut modifier l'exemple précédent pour qu'il soit irréductible.
5. Considérer la marche aléatoire simple sur l'arbre binaire infini (par exemple).

Exercice 2 (Condition de Kolmogorov pour la réversibilité)**.**
On considère une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état dénombrable S, de fonction de transition Q. Montrer que la chaîne admet une mesure réversible (*) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- $\forall (x, y) \in S^2 \qquad Q(x, y) > 0 \implies Q(y, x) > 0;$
- Pour toute "boucle" $x_0, x_1, ..., x_n = x_0$ telle que $\prod_{i=1}^n Q(x_i, x_{i-1}) > 0$, on a

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} \;=\; 1\,.$$

Corrrection : Supposons qu'il existe une mesure réversible μ, i.e., μ n'est pas identiquement nulle (cette partie de la définition est souvent omise car trivialement vérifiée...) et pour tout $(x, y) \in S^2$, $\mu(x)Q(x, y) = \mu(y)Q(y, x)$. Montrons d'abord que $\mu(x) > 0$, pour tout $x \in S$. Supposons qu'il existe x tel que $\mu(x) = 0$. Soit $y \in S$. Puisque la chaîne est irréductible, il existe

$x_0 = y, x_1, ..., x_n = x$ tels que $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour $i = 1 \cdots n$. La condition de réversibilité de μ pour le couple $(x_n - 1, x)$ donne alors

$$\mu(x_{n-1})Q(x_{n-1}, x) \;=\; \mu(x)Q(x, x_{n-1}) \;=\; 0\,,$$

et donc $\mu(x_{n-1}) = 0$. Par une récurrence immédiate, on obtient $\mu(y) = 0$, donc μ est identiquement nulle, ce qui est absurde. On a donc $\mu(x) > 0$ pour tout $x \in S$. La condition de réversibilité s'écrit alors pour tous $(x, y) \in S^2$

$$Q(y, x) \;=\; \frac{\mu(x)}{\mu(y)} Q(x, y)$$

donc

$$Q(x, y) > 0 \implies Q(y, x) > 0\,.$$

Finalement, si on considère une boucle $x_0, x_1, ..., x_n = x_0$ telle que $\prod_{i=1}^n Q(x_i, x_{i-1}) > 0$, on a

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} \;=\; \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu(x_i)}{\mu(x_{i-1})} \;=\; 1\,,$$

ce qui achève la démonstration de la première implication.

• Réciproquement, supposons que les conditions données dans l'énoncé sont satisfaites. Nous allons définir une mesure réversible μ. Soit x fixé arbitrairement dans S, on pose $\mu(x) = 1$. Soit $y \in S$, puisque la chaîne est irréductible il existe $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ tels que $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tout $i = 1, ..., n$. Une condition nécessaire pour que μ soit réversible est que pour tout $i = 1, ..., n$, $\mu(x_{i-1})Q(x_{i-1}, x_i) = \mu(x_i)Q(x_i, x_{i-1})$. Puisque $Q(x_i, x_{i-1}) > 0$ également pour tout i par hypothèse, on obtient immédiatement que

$$\mu(y) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})}\,.$$

Vérifions que $\mu(y)$ est bien défini, c'est à dire que sa valeur ne dépend pas du chemin $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ (tel que $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tout $i = 1, ..., n$) choisi. Soit $y_0 = x, y_1, ..., y_m = y$ un autre chemin tel que $Q(y_{i-1}, y_i) > 0$ pour tout $i = 1, ..., m$. Il faut montrer que

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} \;=\; \prod_{i=1}^{m} \frac{Q(y_{i-1}, y_i)}{Q(y_i, y_{i-1})}\,. \tag{1}$$

Si on note $(z_0, ..., z_{n+m}) = (x, x_1, ..., x_{n-1}, y, y_{m-1}, ..., y_1, x)$, on voit que $(z_0, ..., z_{n+m} = z_0)$ est une boucle telle que $\prod_{i=1}^{n+m} Q(z_i, z_{i-1}) > 0$ (par construction des (x_i) et des (y_i), et grâce à l'hypothèse $Q(x, y) > 0 \Longrightarrow Q(y, x) > 0$), donc on sait que

$$\prod_{i=1}^{n+m} \frac{Q(z_{i-1}, z_i)}{Q(z_i, z_{i-1})} \;=\; 1\,,$$

ce qui donne exactement l'égalité (1) cherchée. La mesure μ est ainsi bien définie partout, et non identiquement nulle. Il reste à vérifier qu'elle est bien réversible. Soit z un autre état de S, il suffit de vérifier que $\mu(y)Q(y, z) = \mu(z)Q(z, y)$. Si $Q(y, z) = 0$, alors $Q(z, y) = 0$ et l'égalité est triviale. Si $Q(y,z) > 0$, alors en reprenant le chemin $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ utilisé pour définir $\mu(y)$, on construit un chemin $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y, x_{n+1} = z$ de x à z tel que $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tout $i = 1, ..., (n+1)$, et par construction de μ on a

$$\mu(z) \; = \; \prod_{i=1}^{n+1} \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} \; = \; \mu(y) \frac{Q(y,z)}{Q(z,y)} \, ,$$

donc μ est bien réversible.

Exercice 3 (Durée de vie des ampoules)**.**
On considère sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant:

- $\mu = \mathbb{E}(Y_1) < \infty$
- pgcd $\{n \geq 1 : \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1$.

On définit le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ par $X_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$X_n \; = \; \inf\{m \geq n \,|\, \exists k \geq 1, Y_1 + \ldots + Y_k = m\} - n \, .$$

Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive et apériodique. En déduire que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(\exists k \geq 1 : Y_1 + \ldots + Y_k = n) \; = \; \frac{1}{\mu}.$$

Indication: X_n est la distance de l'entier n au premier point de $\{Y_1 + \ldots + Y_k \, ; \, k \in \mathbb{N}\}$ situé à sa droite (faire un dessin !).
Remarque: Imaginons que la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ représente la durée de vie d'ampoules. Quand la k^e ampoule ne fonctionne plus, on la remplace par la $(k+1)^e$ dont la durée de vie est Y_{k+1}. Alors, asymptotiquement, la probabilité d'avoir à changer d'ampoule à l'instant n est l'inverse de la moyenne de la durée de vie des ampoules.

Correction : On remarque que, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} X_{n+1} \quad &= \quad \begin{cases} X_n - 1 & \text{si } X_n \neq 0 \\ Y_{k+1} - 1 & \text{si } X_n = 0 \text{ et } n = Y_1 + ... + Y_k \end{cases} \\ &= \quad \mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}}(X_n - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Y_1 + ... + Y_k = n\}}(Y_{k+1} - 1) \, . \end{aligned}$$

Sur l'événement $\{Y_1 + ... + Y_k = n\}$ (qui est évidemment dans $\sigma(Y_1, ..., Y_k)$), les variables $X_0, ..., X_n$ sont $\sigma(Y_1, ..., Y_k)$-mesurables, et donc indépendantes de $X_{n+1} = Y_{k+1} - 1$. Sur l'événement $\{X_n \geq 1\}$, $X_{n+1} = X_n - 1$ p.s. Cela implique que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov de fonction de transition Q définie par

$$\begin{array}{lcll} Q(i, i-1) & = & 1 & \text{pour } i \geq 1 \\ Q(0, i) & = & \mathbb{P}(Y_1 = i+1) & \text{pour } i \geq 0 \\ Q(i,j) & = & 0 & \text{dans les autres cas} \, . \end{array}$$

En effet, on a pour tous $(x_0, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{N}$, si $x_n > 0$:

$$\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_{n+1} = x_{n+1}] = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{n+1} \neq x_n - 1 \\ \mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] & \text{sinon} \end{cases},$$

et si $x_n = 0$, par l'indépendance énoncée ci-dessus:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_{n+1} = x_{n+1}] &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n, X_{n+1} = x_{n+1}] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n, Y_{k+1} = x_{n+1} + 1] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n]\, \mathbb{P}[Y_{k+1} = x_{n+1} + 1] \\
&= \Big(\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n]\Big) \\
&\qquad \times \mathbb{P}[Y_1 = x_{n+1} + 1] \\
&= \mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = 0]\, \mathbb{P}[Y_1 = x_{n+1} - 1]\,.
\end{aligned}$$

L'espace d'états de $(X_n)_{n\geq 0}$ est $S = \{0, \ldots, M\}$ si $M = \sup\{i \geq 0 : \mathbb{P}(Y_1 = i + 1) > 0\} < \infty$ et $S = \mathbb{N}$ sinon. On vérifie facilement que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible: soient $i, j \in S$, si $i > j$, $Q^{j-i}(i, j) = 1 > 0$, et si $i \leq j$, $Q^{i+m-j+1}(i, j) \geq Q^i(i, 0)Q(0, m)Q^{m-j}(m, j) > 0$ pour $m \geq j$ tel que $\mathbb{P}(Y_1 = m) > 0$.

Dans le cas où la chaîne est à espace d'états fini, il est immédiat que la chaîne, étant irréductible, est récurrente positive. Dans le cas général, on remarque que, $\mathbb{P}$ p.s., $H_0 = Y_1$ (où H_0 désigne le premier temps de "retour" en 0, i.e. $H_0 = \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n = 0\}$). Ainsi, $\mathbb{E}(H_0) = \mu < \infty$, ce qui implique que $(X_n)_{n\geq 0}$ est récurrente (car $X_0 = 0$ et H_0 est fini $\mathbb{P}$ p.s.) positive.

Enfin, pour tout $n \geq 1$,

$$Q^n(0, 0) \geq \mathbb{P}(Y_1 = n)\,,$$

donc

$$L_0 = \{n \geq 1 \,|\, Q^n(0, 0) > 0\} \supset \{n \geq 1 \,|\, \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\}\,,$$

où ce dernier ensemble est de PGCD 1, donc 0 est de période 1, donc la chaîne est apériodique.

On a donc

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathbb{E}(H_0)}$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}(\exists k \geq 1 \,|\, Y_1 + \ldots + Y_k = n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu}\,.$$

Exercice 4 (Rangement sur une étagère)**.**
Chaque matin un étudiant prend un des trois livres (numérotés de 1 à 3) posés sur son étagère. La probabilité qu'il choisisse le livre i est α_i, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, où $0 < \alpha_i < 1$, et les choix qu'il fait jours après jours sont indépendants. Le soir, il replace le livre qu'il a pris à gauche des autres, sans déranger les autres. Quel est le comportement asymptotique de p_n, la probabilité que le n-ième matin au réveil l'étudiant trouve ses livres rangés dans l'ordre $(1, 2, 3)$ (de gauche à droite)? Quel est le comportement asymptotique du nombre de fois où l'étudiant prend le livre le plus à gauche sur son étagère?

Correction : Pour tout $n \geq 0$, on note X_n l'ordre des livres au i-ème matin (avant que l'étudiant ne fasse son choix). X_n est à valeurs dans l'espace d'états fini

$$S = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}\,.$$

On note ξ_n le numéro du livre choisi par l'étudiant le n-ième matin. Les $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{1,2,3\}$, de loi (qu'on va noter γ) $\mathbb{P}[\xi_1 = i] = \alpha_i$ pour $i = 1,2,3$. Pour tout n, X_n est $\sigma(\xi_0,...,\xi_{n-1})$-mesurable, donc ξ_n est indépendant de $(X_0,...,X_n)$. Soient $x_0 = (a_0,b_0,c_0),...,x_{n+1} = (a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1})$ des élements de S, on a donc

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_0 = x_0 \quad ,..., X_{n+1} = x_{n+1}]\\
&= \left\{\begin{array}{ll}
\mathbb{P}[X_0 = x_0,...,X_n = x_n, \xi_n = a_n] & = \mathbb{P}[X_0 = x_0,...,X_n = x_n]\,\alpha_{a_n}\\
& \text{si } x_{n+1} = (a_n,b_n,c_n)\\
\mathbb{P}[X_0 = x_0,...,X_n = x_n, \xi_n = b_n] & = \mathbb{P}[X_0 = x_0,...,X_n = x_n]\,\alpha_{b_n}\\
& \text{si } x_{n+1} = (b_n,a_n,c_n)\\
\mathbb{P}[X_0 = x_0,...,X_n = x_n, \xi_n = c_n] & = \mathbb{P}[X_0 = x_0,...,X_n = x_n]\,\alpha_{c_n}\\
& \text{si } x_{n+1} = (c_n,a_n,b_n)\\
0 & \text{sinon}\,.
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

On en déduit que (X_n) est une chaîne de Markov, à valeurs dans S, de fonction de transition Q déterminée par:

$$\begin{aligned}
Q((a,b,c),(a,b,c)) &= \alpha_a\,,\\
Q((a,b,c),(b,a,c)) &= \alpha_b\,,\\
Q((a,b,c),(c,a,b)) &= \alpha_c\,,\\
Q((a,b,c),(d,e,f)) &= 0 \text{ dans les autres cas,}
\end{aligned}$$

pour tout $(a,b,c) \in S$.

Cette chaîne est irréductible. En effet, pour tout $(a,b,c) \in S$, on a

$$Q((a,b,c),(a,b,c)) = \alpha_a > 0\,,\; Q((a,b,c),(b,a,c))\,\alpha_b > 0 \text{ et } Q((a,b,c),(c,a,b)) = \alpha_c > 0\,,$$

mais aussi

$$\begin{aligned}
&Q^2((a,b,c),(c,b,a)) \geq Q((a,b,c),(b,a,c))Q((b,a,c),(c,b,a)) = \alpha_b\alpha_c > 0\,,\\
&Q^2((a,b,c),(a,c,b)) \geq Q((a,b,c),(c,a,b))Q((c,a,b),(a,c,b)) = \alpha_c\alpha_a > 0\,,\\
\text{et}\quad &Q^2((a,b,c),(b,c,a)) \geq Q((a,b,c),(c,a,b))Q((c,a,b),(b,c,a)) = \alpha_c\alpha_b > 0\,.
\end{aligned}$$

L'espace d'états S étant fini, et la chaîne étant irréductible, elle est récurrente positive. Elle possède donc une unique probabilité invariante, qui nous allons noter π.

Finalement, il est évident que cette chaîne est apériodique, puisque $Q((1,2,3),(1,2,3)) = \alpha_1 > 0$ (tous les états d'une chaîne irréductible récurrente ont même période). Le comportement asymptotique de (X_n) est donc donné par π: on sait que pour tout $(a,b,c) \in S$, p.s.,

$$\mathbb{P}_{(a,b,c)}[X_n = (1,2,3)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi((1,2,3))\,,$$

donc $\lim_{n\to\infty} p_n = \pi((1,2,3))$. Il nous reste donc à calculer π.

L'idée naturelle est de chercher une mesure réversible, mais malheureusement il n'en existe pas pour cette chaîne. En effet, on a $Q((1,2,3),(3,1,2)) = \alpha_3 > 0$ mais $Q((3,1,2)(1,2,3)) = 0$, donc si π était réversible on aurait $\pi((1,2,3)) = 0$ (car on aurait $0 = \alpha_3 \pi((1,2,3)))$, et comme la chaîne est irréductible, en passant d'états en états avec une probabilité strictement positive, on obtiendrait que $\pi = 0$, ce qui est absurde (voir l'exercice 3 pour plus de détails). Heureusement, S est de cardinal seulement 6, donc trouver la probabilité invariante est quand même possible. Prenons un état (a,b,c) générique dans S. $Q(x,(a,b,c)) > 0$ si et seulement si $x \in \{(a,b,c),(b,a,c),(b,c,a)\}$, et dans ce cas $Q(x,(a,b,c)) = \alpha_a$. La condition d'invariance pour π s'écrit donc, pour tout $(a,b,c) \in S$,

$$\pi((a,b,c)) \;=\; \alpha_a \left[\pi((a,b,c)) + \pi((b,a,c)) + \pi((b,c,a))\right] . \tag{2}$$

En considérant (2) pour les états (a,b,c) et (a,c,b), et en sommant les deux relations obtenues, on obtient

$$\pi((a,b,c)) + \pi((a,c,b)) \;=\; \alpha_a \sum_{x\in S} \pi(x) \;=\; \alpha_a .$$

Alors (2) donne

$$\pi((a,b,c)) \;=\; \alpha_a \left(\pi((a,b,c)) + \alpha_b\right)$$

et donc

$$\pi((a,b,c)) \;=\; \frac{\alpha_a \alpha_b}{1-\alpha_a} .$$

On en déduit que p_n converge vers $\pi((1,2,3)) = \alpha_1\alpha_2/(1-\alpha_1)$.

• A présent, on veut des informations sur le nombre moyen de fois où l'étudiant choisit le livre qui est à une place donnée. On voit que la place du livre choisi le jour n est une information qui n'est pas contenue dans X_n ou X_{n+1}, mais elle est contenu dans le couple (X_n, X_{n+1}), ou dans le couple (X_n, ξ_n).

Je m'interesse ici à l'approche dans laquelle on regarde de plus près la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((X_n,\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Pour simplifier les notations, si $x \in S$ et $a \in \{1,2,3\}$, je note x^a l'élément de S obtenu à partir de x en faisant passer a à gauche du triplet x sans désordonner les deux autres éléments de x, par exemple $(1,2,3)^2 = (2,1,3)$. Je vais moins détailler les démonstrations dans ce cas, puisque la rédaction complète a déjà été faite dans l'étude de la chaîne (X_n). On vérifie facilement que (Z_n) est une chaîne de Markov, de matrice de transition $\widetilde{Q}$ définie par

$$\forall (x,a),\ (y,b) \in S \times \{1,2,3\} \qquad \widetilde{Q}((x,a),(y,b)) \;=\; \begin{cases} \alpha_b & \text{si } y = x^a , \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Cette chaîne est irréductible, comme l'était (X_n), car pour tout $b \in \{1,2,3\}$, $\widetilde{Q}((x,a),(x^a,b)) > 0$. Etant aussi à valeurs dans un espace d'états fini ($S \times \{1,2,3\}$), elle est irréductible récurrente positive. Il existe donc une probabilité invariante pour cette chaîne. Il est naturel de penser que cette probabilité est simplement $\pi \otimes \gamma$ (où γ est la loi des ξ_n), et on le vérifie facilement:

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,a)} \pi(x)\gamma(a)\widetilde{Q}((x,a),(y,b)) \quad &= \quad \sum_{(x,a) \text{ tel que } y=x^a} \pi(x)\alpha_a\alpha_b \\
&= \quad \alpha_b \left(\sum_{(x,a) \text{ tel que } y=x^a} \pi(x)\alpha_a \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_b \left(\sum_x \pi(x) Q(x,y) \right) \\
&= \gamma(b)\pi(y)\,,
\end{aligned}
$$

où on a utilisé le fait que π est invariante pour Q, et $\gamma(a) = \alpha_a$. Par un théorème du cours, la chaîne (Z_n) étant irréductible récurrente positive, de probabilité invariante $\pi \otimes \gamma$, pour toute fonction $f : S \times \{1,2,3\} \to \mathbb{R}^+$ intégrable par rapport à $\pi \otimes \gamma$, on a (quelque soit l'état initial de la chaîne) p.s.:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(Z_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f(z)\, \pi \otimes \gamma\,(dz)\,.$$

On prend $f((a,b,c),d) = \mathbb{1}_{\{a=d\}}$. En notant G_n l'événement "l'étudiant choisit le livre situé le plus à gauche le n-ième matin", on obtient

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{G_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} &\sum_{(a,b,c)\in S}\ \sum_{d\in\{1,2,3\}} \mathbb{1}_{\{a=d\}}\, \alpha_d\, \pi((a,b,c)) \\
= &\sum_{(a,b,c)\in S} \pi((a,b,c))\, \alpha_a \\
= &\ \alpha_1\, (\pi((1,2,3)) + \pi((1,3,2))) + \ldots \\
= &\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\,.
\end{aligned}
$$

Ceci signifie que asymptotiquement, l'étudiant prend le livre situé le plus à gauche sur l'étagère une proportion $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ du temps.

L'autre approche, à savoir décrire les sauts entre X_n et X_{n+1}, est possible aussi, et sera sûrement plus naturelle pour certains. Je ne détaille pas la rédaction ici, mais l'idée est la suivante. On a évidemment

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{G_k\}} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{(a,b,c)\in S} \mathbb{1}_{\{X_k=(a,b,c), X_{k+1}=(a,b,c)\}} = \sum_{(a,b,c)\in S} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=(a,b,c), X_{k+1}=(a,b,c)\}}\,.$$

Or, pour tout état (a,b,c) donné, les excursions hors de l'état (a,b,c) sont i.i.d. Comme (X_n) est une chaîne irréductible récurrente positive de probabilité invariante π, le nombre d'excursions hors de (a,b,c) avant n est p.s. équivalent à $n\pi((a,b,c))$. Donc le nombre de sauts de la chaîne de (a,b,c) à (a,b,c) avant n est p.s. équivalent à $n\pi((a,b,c))Q((a,b,c),(a,b,c))$, puisque chaque excursion en dehors de (a,b,c) commence (et dans ce cas se finit) par un saut de (a,b,c) vers (a,b,c) avec probabilité $Q((a,b,c),(a,b,c))$ et que les excursions sont indépendantes. Il suffit donc de sommer sur les états (a,b,c) pour retrouver le résultat précédant.

Exercice 5 (Tiré du partiel 2007 de J.-F. Le Gall)**.** Soit $\xi_1, \xi_2, \ldots$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi notée γ. On suppose dans tout l'exercice que $\gamma(0) > 0$ et qu'il existe un entier $j \geq 2$ tel que $\gamma(j) > 0$. Soit aussi p un entier positif. On définit par récurrence une suite de v.a. $Y_0, Y_1, \ldots$ en posant $Y_0 = p$ et, pour tout entier $n \geq 0$,

$$Y_{n+1} = (Y_n + \xi_{n+1} - 1)^+\,,$$

où $\cdot^+$ désigne simplement la partie positive.

1. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ dont la fonction de transition est caractérisée par:

$$\begin{array}{lcll} Q(0,0) & = & \gamma(0)+\gamma(1) & , \\ Q(0,j) & = & \gamma(j+1) & \text{pour tout } j \geq 1\,, \\ Q(i,i+j-1) & = & \gamma(j) & \text{pour tous } i \geq 1 \text{ et } j \geq 0\,. \end{array}$$

2. Montrer que la chaîne est irréductible.

3. Dans cette question seulement on suppose que $\gamma(j) = 0$ si $j \geq 3$ (et donc $\gamma(2) > 0$) et $\gamma(2) < \gamma(0)$. Montrer que la chaîne admet une mesure réversible que l'on déterminera. En déduire qu'elle est récurrente, et donner son comportement asymptotique dans ce cas.

4. On revient au cas général, et on note

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} k\gamma(k)\,.$$

On définit Z_n pour tout entier $n \geq 0$ en posant

$$Z_n = p + \sum_{k=1}^{n}(\xi_k - 1) \qquad \text{(en particulier } Z_0 = p)\,.$$

Montrer que $Y_n \geq Z_n$ pour tout entier $n \geq 0$, p.s. En déduire que si $m > 1$, on a $Y_n \to +\infty$ quand $n \to \infty$, p.s., et tous les états de la chaîne (Y_n) sont transitoires.

5. On note $T = \inf\{n \geq 0 \,|\, Z_n = 0\}$. Montrer que $Y_n = Z_n$ pour tout $n \leq T$, p.s. En déduire que si $m \leq 1$ tous les états de la chaîne (Y_n) sont récurrents.

Correction :

1. Je vous renvoie à l'exercice 1 du TD7, où on a montrer que si les ξ_i sont i.i.d. et que les Y_n sont définis de façon récursive par $Y_{n+1} = \phi(Y_n, \xi_{n+1})$, alors Y_n est une chaîne de Markov. Il est ensuite facile de vérifier la forme de la matrice de transition.

2. Il existe $j \geq 2$ tel que $\gamma(j) > 0$, donc il est possible dans la chaîne de Markov de faire des pas de longueur $j-1$ vers la droite, et comme $\gamma(0) > 0$, il est possible de faire des pas de taille 1 vers la gauche. Ainsi pour relier deux sommets quelconques, on peut faire suffisamment de grands pas vers la droite, puis revenir de quelques pas sur la gauche si on est allé" treop loin.

3. Les hypothèses de la question nous disent qu'on a $Q(i,i+1) = \gamma(2)$ et $Q(i,i-1) = \gamma(0)$. Vous avez déjà fait cet exemple dans le cours : c'est une marche aléatoire simple avec drift réfl{echie en 0. La mesure sur les entiers

$$\pi(k) = \left(\frac{\gamma(2)}{\gamma(0)}\right)^k \left(1 - \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)}\right)$$

est une probabilité invariante et même réversible.

4. Cela se prouve facilement par récurrence :

$$\text{si } \; Y_n \geq Z_n, \; \text{ alors } \; (Y_n + \xi_{n+1} - 1)^+ \geq (Z_n + \xi_{n+1} - 1).$$

5. On a déjà montré que la chaîne est irréductible, donc les états sont tous récurrents ou tous transitoires. Je vais montrer que 0 est récurrent. Comme $Y_n = Z_n$ tant que l'on n'a pas atteint 0, si 0 n'était jamais atteint par Y_n, on aurait toujours $Y_n = Z_n$ et 0 ne serait jamais atteint par Z_n. Mais Z_n est un marche aléatoire qui tend vers $-\infty$, qui commence par un point $k > 0$ et qui fait des pas vers la gauche de 1 (et ne paut donc pas sauter par dessus 0). Donc 0 est toujours atteint. Pour montrer que 0 est récurrent, il faut montrer que 0 est atteint un nombre infini de fois, c-à-d que pour tout N il existe $n \geq N$ tq $Y_n = 0$:

$$\mathbb{P}_k[\exists n \geq N, \; Y_n = 0] = \mathbb{E}_k\left[\mathbb{E}_{Y_N}[\exists n \geq N, \; Y_n = 0]\right] = 1.$$