PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 9
CHAÎNES DE MARKOV - MESURE INVARIANTE

Exercice 1 (Existence et unicité des mesures invariantes).

- Une chaîne de Markov qui est récurrente a-t-elle une mesure invariante ? Réciproque ?
- Si une chaîne de Markov a une mesure invariante finie, est-elle récurrente ?
- Une chaîne de Markov admet-elle toujours une mesure invariante (non nulle) ?
- Et si elle est irréductible ?
- Si il existe une mesure invariante (non nulle), est-elle unique ?

Exercice 2 (Condition de Kolmogorov pour la réversibilité).
On considère une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état dénombrable S, de fonction de transition Q. Montrer que la chaîne admet une mesure réversible si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- $\forall (x,y) \in S^2 \qquad Q(x,y) > 0 \implies Q(y,x) > 0;$
- Pour toute "boucle" $x_0, x_1, ..., x_n = x_0$ telle que $\prod_{i=1}^n Q(x_i, x_{i-1}) > 0$, on a

$$\prod_{i=1}^n \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} = 1 .$$

Exercice 3 (Durée de vie des ampoules).
On considère sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

- $\mu = \mathbb{E}(Y_1) < \infty$
- pgcd $\{n \geq 1 : \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1$.

On définit le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \inf\{m \geq n \,|\, \exists k \geq 1, Y_1 + \ldots + Y_k = m\} - n .$$

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive et apériodique. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\exists k \geq 1 : Y_1 + \ldots + Y_k = n) = \frac{1}{\mu}.$$

Indication: X_n est la distance de l'entier n au premier point de $\{Y_1 + \ldots + Y_k \,;\, k \in \mathbb{N}\}$ situé à sa droite (faire un dessin !).
Remarque: Imaginons que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ représente la durée de vie d'ampoules. Quand la k^e ampoule ne fonctionne plus, on la remplace par la $(k+1)^e$ dont la durée de vie est Y_{k+1}. Alors, asymptotiquement, la probabilité d'avoir à changer d'ampoule à l'instant n est l'inverse de la moyenne de la durée de vie des ampoules.

Exercice 4 (Rangement sur une étagère).
Chaque matin un étudiant prend un des trois livres (numérotés de 1 à 3) posés sur son étagère. La probabilité qu'il choisisse le livre i est α_i, pour $i \in \{1,2,3\}$, où $0 < \alpha_i < 1$, et les choix qu'il fait jours après jours sont indépendants. Le soir, il replace le livre qu'il a pris à gauche des autres, sans déranger les autres. Quel est le comportement asymptotique de p_n, la probabilité que le n-ième matin au réveil l'étudiant trouve ses livres rangés dans l'ordre $(1,2,3)$ (de gauche à droite)? Quel est le comportement asymptotique du nombre de fois où l'étudiant prend le livre le plus à gauche sur son étagère?

Exercice 5 (Tiré du partiel 2007 de J.-F. Le Gall)**.** Soit $\xi_1, \xi_2, \ldots$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi notée γ. On suppose dans tout l'exercice que $\gamma(0) > 0$ et qu'il existe un entier $j \geq 2$ tel que $\gamma(j) > 0$. Soit aussi p un entier positif. On définit par récurrence une suite de v.a. $Y_0, Y_1, \ldots$ en posant $Y_0 = p$ et, pour tout entier $n \geq 0$,

$$Y_{n+1} = (Y_n + \xi_{n+1} - 1)^+ ,$$

où $\cdot^+$ désigne simplement la partie positive.

1. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ dont la fonction de transition est caractérisée par:

$$\begin{array}{lcll} Q(0,0) & = & \gamma(0)+\gamma(1) & , \\ Q(0,j) & = & \gamma(j+1) & \text{pour tout } j \geq 1\,, \\ Q(i,i+j-1) & = & \gamma(j) & \text{pour tous } i \geq 1 \text{ et } j \geq 0\,. \end{array}$$

2. Montrer que la chaîne est irréductible.

3. Dans cette question seulement on suppose que $\gamma(j) = 0$ si $j \geq 3$ (et donc $\gamma(2) > 0$) et $\gamma(2) < \gamma(0)$. Montrer que la chaîne admet une mesure réversible que l'on déterminera. En déduire qu'elle est récurrente, et donner son comportement asymptotique dans ce cas.

4. On revient au cas général, et on note

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} k\gamma(k)\,.$$

   On définit Z_n pour tout entier $n \geq 0$ en posant

$$Z_n = p + \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - 1) \qquad \text{(en particulier } Z_0 = p)\,.$$

   Montrer que $Y_n \geq Z_n$ pour tout entier $n \geq 0$, p.s. En déduire que si $m > 1$, on a $Y_n \to +\infty$ quand $n \to \infty$, p.s., et tous les états de la chaîne (Y_n) sont transitoires.

5. On note $T = \inf\{n \geq 0 \mid Z_n = 0\}$. Montrer que $Y_n = Z_n$ pour tout $n \leq T$, p.s. En déduire que si $m \leq 1$ tous les états de la chaîne (Y_n) sont récurrents.