9 Mouvement Brownien I

Exercice 9.1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration qu'il engendre, T un temps d'arrêt presque sûrement fini et $\mathcal{F}_T$ la tribu associée. Montrer que $(B_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$.

Correction : Il s'agit de voir que pour tout $t_0 \geq 0$ on a $B_{t_0\wedge T}$ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$. Remarquons tout d'abord un fait général (facile à démontrer) : si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$ alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$. On va démontrer que si on pose le temps d'arrêt $S = t_0 \wedge T$, alors B_S est $\mathcal{F}_S$ mesurable et donc $\mathcal{F}_T$ mesurable par la remarque ci-dessus.
Pour cela on se rend compte que pour les ω pour lesquels $t \mapsto B_t(\omega)$ est continu et $S(\omega) < \infty$ on a

$$B_{S(\omega)}(\omega) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} B_{i2^{-n}} \mathbf{1}_{i2^{-n}\leq S<(i+1)2^{-n}}.$$

La convergence ci-dessus a donc lieu pour presque tout ω. Il suffit donc de voir que pour tout $i, n \geq 0$, $B_{i2^{-n}}\mathbf{1}_{i2^{-n}\leq S\leq(i+1)2^{-n}}$ est $\mathcal{F}_S$ mesurable. C'est facile mais assez fastidieux.

Exercice 9.2 (Fonctions harmoniques)**.** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction localement bornée. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes (la fonction f est alors *harmonique*).

1. (Propriété de la moyenne) Pour tout $x \in \Omega$ et tout $r < \mathrm{dist}(x, \Omega^c)$ on a
$$u(x) = \frac{1}{2\pi r}\int_{C(x,r)} u,$$
autrement dit, la moyenne de u sur tout cercle dont le disque est inclus dans Ω est égale à la valeur de u au centre de ce cercle.
2. La fonction u est de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et satisfait $\Delta u = 0$ où Δ est l'opérateur $\partial_{xx} + \partial_{yy}$.
3. La fonction u est de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ et satisfait $\Delta u = 0$.

Correction : L'équivalence entre ces propriétés est démontrée dans le poly de Jean-François Le Gall : Proposition 14.6.4 et Proposition 14.6.8.

Exercice 9.3 (Temps d'atteinte)**.** Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel. Pour $a \geq 0$, on pose $T_a = \inf\{s \geq 0 : B_t = a\}$.

1. Montrer que pour tout $a \geq 0$, $T_a = a^2 T_1$ en loi.
2. Soit $0 \leq a \leq b < \infty$, montrer que $T_b - T_a$ a la même loi que T_{b-a} et est indépendant de T_a.

Correction :

1. Soit $(B_t)_{t\geq}$ un mouvement brownien. D'après les propriétés d'invariance d'échelle du MB le processus $\tilde{B}_t = aB_{t/a^2}$ a la loi d'un mouvement brownien. Ainsi si (la princesse) $\tilde{T}_a = \inf\{t \geq 0 : \tilde{B}_t = a\}$ on a l'égalité en distribution $T_a = \tilde{T}_a$. Or par définition on a $\tilde{T}_1 = a^2 T_1$.

2. On a déjà vérifié que T_a est un temps d'arrêt (exercice précédent). On peut donc appliquer la propriété de Markov fort à T_a pour obtenir que B^{T_a} est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$. Or si l'on pose $T_{b-a}^{T_a} = \inf\{t \geq 0 : B_t^{T_a} = b - a\}$ on a l'égalité

$$T_b = T_a + T_{b-a}^{T_a}.$$

En particulier $T_{b-a}^{T_a}$ a la même loi que T_{b-a} et est indépendant de T_a.

Exercice 9.4 (Convergence en loi)**.** On pose $S_1 = \sup_{t\in[0,1]} B_t$. Montrer que la convergence suivante a lieu en loi :

$$\left(\int_0^t e^{B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} e^{S_1}.$$

Indication : on pourra penser à un changement d'échelle.

Correction : On remarque tout d'abord que, d'après la propriété de changement d'échelle du mouvement brownien,

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{B_s} ds &\overset{\text{loi}}{=} \int_0^t e^{\sqrt{t}B_{s/t}} ds.\\ &\overset{\text{loi}}{=} t\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s} ds.\end{aligned}$$

Or $t^{1/\sqrt{t}} \to 1$ quand $t \to \infty$. Il suffit donc de montrer la convergence en loi suivante:

$$\left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} e^{S_1}.$$

On va en fait montrer une convergence p.s. On remarque que

$$\left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \leq \left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}S_1} ds\right)^{1/\sqrt{t}} = e^{S_1}.$$

Il existe A un ensemble mesurable de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in A$, $t \mapsto B_t(\omega)$ est continu. Soit $\omega \in A$. On note $T(\omega) \in [0,1]$ tel que $B_{T(\omega)}(\omega) = S_1(\omega)$ (existe car $B(\omega)$ continu et $[0,1]$ compact). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta(\omega) > 0$ tel que $|B_t(\omega) - B_{T(\omega)}(\omega)| \leq \varepsilon$ pour $|t - T(\omega)| \leq \delta(\omega)$ (uniforme continuité sur les compacts). Ainsi,

$$\left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s(\omega)} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \geq (\delta(\omega))^{1/\sqrt{t}} e^{S_1(\omega)-\varepsilon}.$$

Donc,

$$\liminf_{t\to\infty} \left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s(\omega)} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \geq e^{S_1(\omega)-\varepsilon}.$$

On a montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, p.s.,

$$\liminf_{t\to\infty} \left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \geq e^{S_1-\varepsilon}.$$

En considérant une suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ (pour inverser le p.s. et le $\forall \varepsilon_k$), on en déduit que p.s.,

$$\liminf_{t\to\infty} \left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s} ds \right)^{1/\sqrt{t}} \geq e^{S_1}$$

ce qui implique la limite p.s. désirée.

Exercice 9.5 (Invariance par isométrie)**.** Démontrer la propriété d'invariance du mouvement brownien par isométrie vectorielle (vue en cours).

Correction : Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien en dimension d. Soit ψ une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^d$ (vectorielle signifie que $\psi(0) = 0$). On a donc, pour tout couple de vecteurs x, y, les égalités suivantes (dont nous nous servirons par la suite):

$$\|\psi(x) - \psi(y)\| = \|x - y\|\,, \quad \|\psi(x)\| = \|x\|\,, \quad \psi(x)\cdot\psi(y) = x\cdot y\,.$$

Soit $B'_t = \psi(B_t)$ pour tout $t \geq 0$. Il existe un ensemble A mesurable de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in A$, $t \mapsto B_t(\omega)$ est continu. Alors pour tout $\omega \in A$, $t \mapsto B'_t(\omega)$ est continu aussi car ψ est continue. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tous $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p$, l'indépendance des variables aléatoires $B'_{t_1}, B'_{t_2} - B'_{t_1}, ..., B'_{t_p} - B'_{t_{p-1}}$ vient du fait que pour tout i, $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t_i}$ (propriété de Markov faible), donc il en est de même pour $\psi(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$, or $\psi(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \psi(B_{t_{i+1}}) - \psi(B_{t_i})$ (se vérifie facilement à l'aide des propriétés données ci-dessus). Il reste à montrer que pour tout i, $\psi(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ suit une loi $\mathcal{N}(0, (t_{i+1} - t_i)Id)$. Considérons la fonction caractéristique de cette variable aléatoire:

$$\begin{aligned}
\phi_{\psi(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})}(u) &= \mathbb{E}\left(e^{i\psi(v)\cdot\psi(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(e^{iv\cdot(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})}\right)\\
&= e^{-\frac{(t_{i+1}-t_i)\|v\|^2}{2}}\\
&= e^{-\frac{(t_{i+1}-t_i)\|u\|^2}{2}}
\end{aligned}$$

ce qui montre la propriété cherchée. On a utilisé ici successivement le fait que ψ est bijective donc on peut trouver v tel que $u = \psi(v)$, ainsi que les propriétés énoncées au début de la correction de l'exercice.

Exercice 9.6 (Le mouvement brownien n'est à variation finie sur aucun intervalle)**.** Soient a et b tels que $0 \leq a < b$. On pose, pour $n \geq 0$,

$$X_n = \sum_{k=1}^{2^n} \left(B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}}\right)^2\,.$$

Calculer la moyenne et la variance de X_n puis trouver la limite p.s. de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$. En déduire que p.s., la fonction $t \longmapsto B_t$ n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est à variation finie sur l'intervalle $[a, b]$ si les sommes

$$\sum_{i=1}^{p} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

sont bornées indépendamment de p et de la subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$.

Correction : On sait que les que les variables $B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}}$, pour $k = 1, ..., 2^n$, sont des gaussiennes centrées indépendantes, de variance $(b-a)2^{-n}$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{2^n}(B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}})^2\right) = \sum_{k=1}^{2^n}(b-a)2^{-n} = (b-a)$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^2) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{2^n}(B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}})^2\right)^2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n}\mathbb{E}((B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}})^4) \\
+2 \sum_{1\le k<l\le 2^n} & \mathbb{E}((B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}})^2)\mathbb{E}((B_{a+l(b-a)2^{-n}} - B_{a+(l-1)(b-a)2^{-n}})^2) \\
&= 3(b-a)^2 2^{-n} + 2\frac{2^n(2^n-1)}{2}(b-a)^2 2^{-2n} = (b-a)^2(1+2^{1-n}),
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la troisième égalité que $\mathbb{E}(Y^4) = 3\sigma^4$ si Y est une $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ (cela se recalcule facilement par intégration par partie). On obtient donc que

$$Var(X_n) = (b-a)^2 2^{1-n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a, d'après l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(|X_n - (b-a)| > \varepsilon) \le \frac{\mathbb{E}(|X_n - (b-a)|^2)}{\varepsilon^2} = \frac{(b-a)^2}{2^{n-1}\varepsilon^2}.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., il existe n_0 tel que $|X_n - (b-a)| \le \varepsilon$ pour tout $n \ge n_0$. En considérant une suite $(\varepsilon_k)_{k\ge 0}$, on obtient que p.s., pour tout ε_k, il existe n_0 tel que $|X_n - (b-a)| \le \varepsilon_k$ pour tout $n \ge n_0$, soit la convergence suivante:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} b-a.$$

Soient a et b tels que $0 \le a < b$. On a

$$X_n \le \sup_{1\le k\le 2^n}\left|B_{a+(b-a)k2^{-n}} - B_{a+(b-a)(k-1)2^{-n}}\right| \times \sum_{k=1}^{2^n}\left|B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}}\right|$$

et par continuité p.s. du mouvement brownien,

$$\sup_{1\le k\le 2^n}\left|B_{a+(b-a)k2^{-n}} - B_{a+(b-a)(k-1)2^{-n}}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$$

ce qui implique

$$\sum_{k=1}^{2^n}|B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}}| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} +\infty.$$

Ainsi, pour tout intervalle non trivial $[a,b]$, p.s., la fonction $t \longmapsto B_t$ n'est pas à variation finie sur $[a,b]$. On a donc p.s., pour tout intervalle $[a,b]$ non trivial dont les extrémités sont rationnelles, $t \longmapsto B_t$ n'est pas à variation finie sur $[a,b]$. Enfin, on obtient que p.s., $t \longmapsto B_t$ n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial $[a,b]$, en choisissant pour chaque tel $[a,b]$ un intervalle non trivial $[a',b']$ dont les extrémités sont rationnelles et tel que $[a',b'] \subset [a,b]$, et en remarquant que la variation totale de B sur $[a,b]$ (i.e. le supremum de l'expression proposée dans l'énoncé sur toutes les subdivisions finies de $[a,b]$ possibles) est supérieure ou égale à la variation totale de B sur $[a',b']$.