9 Mouvement Brownien I

Exercice 9.1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration qu'il engendre, T un temps d'arrêt presque sûrement fini et $\mathcal{F}_T$ la tribu associée. Montrer que $(B_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$.

Exercice 9.2 (Fonctions harmoniques)**.** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction localement bornée. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes (la fonction f est alors *harmonique*).

1. (Propriété de la moyenne) Pour tout $x \in \Omega$ et tout $r < \mathrm{dist}(x, \Omega^c)$ on a
$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C(x,r)} u,$$
autrement dit, la moyenne de u sur tout cercle dont le disque est inclus dans Ω est égale à la valeur de u au centre de ce cercle.
2. La fonction u est de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et satisfait $\Delta u = 0$ où Δ est l'opérateur $\partial_{xx} + \partial_{yy}$.
3. La fonction u est de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ et satisfait $\Delta u = 0$.

Exercice 9.3 (Temps d'atteinte)**.** Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel. Pour $a \geq 0$, on pose $T_a = \inf\{s \geq 0 : B_t = a\}$.

1. Montrer que pour tout $a \geq 0$, $T_a = a^2 T_1$ en loi.
2. Soit $0 \leq a \leq b < \infty$, montrer que $T_b - T_a$ a la même loi que T_{b-a} et est indépendant de T_a.

Exercice 9.4 (Convergence en loi)**.** On pose $S_1 = \sup_{t\in[0,1]} B_t$. Montrer que la convergence suivante a lieu en loi :
$$\left(\int_0^t e^{B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} e^{S_1}.$$
Indication : on pourra penser à un changement d'échelle.

Exercice 9.5 (Invariance par isométrie)**.** Démontrer la propriété d'invariance du mouvement brownien par isométrie vectorielle (vue en cours).

Exercice 9.6 (Le mouvement brownien n'est à variation finie sur aucun intervalle)**.** Soient a et b tels que $0 \leq a < b$. On pose, pour $n \geq 0$,
$$X_n = \sum_{k=1}^{2^n} \left(B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}}\right)^2 .$$
Calculer la moyenne et la variance de X_n puis trouver la limite p.s. de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$. En déduire que p.s., la fonction $t \longmapsto B_t$ n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est à variation finie sur l'intervalle $[a, b]$ si les sommes
$$\sum_{i=1}^{p} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$
sont bornées indépendamment de p et de la subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$.