TD9 : Modules de longueur finie

Diego Izquierdo

L'exercice 0 est à préparer avant la séance.

Exercice 0 (à préparer) : TD8
Faire les exercices 0', 3 et 4 (seules les questions 1, 2 et 3 sont à préparer) du TD8.

Exercice 0' : TD8
Faire l'exercice 6 du TD8.

Exercice 1 : Exemples de modules de longueur finie

1. Soient A un anneau principal et x un élément de A. Quelle est la longueur de $A/(x)$ comme A-module ?
2. Quelle est la longueur de $\mathbb{Z}[X]/(12, X^5 - 6)$ comme $\mathbb{Z}$-module ? Et comme $\mathbb{Z}[X]$-module ?

Exercice 2 : Longueur d'un module
Soient A un anneau, M un A-module et M_1 et M_2 deux sous-A-modules de M. Montrer que :

$$\ell(M_1 + M_2) + \ell(M_1 \cap M_2) = \ell(M_1) + \ell(M_2).$$

Exercice 3 : Endomorphismes d'un module de longueur finie
Soient A un anneau et M un A-module de longueur finie. Soit f un endomorphisme de M. Montrer que f est injectif si, et seulement si, il est surjectif.

Exercice 4 : Longueur et restriction des scalaires
Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux et M un B-module. On note $\ell_A(M)$ (resp. $\ell_B(M)$) la longueur de M en tant que A-module (resp. B-module). Montrer que, si f est surjectif, alors $\ell_A(M) = \ell_B(M)$. Le résultat subsiste-t'il si f n'est pas supposé surjectif ?

Exercice 5 : Longueur et extension des scalaires
Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux locaux. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. On considère l'indice de ramification de B sur A, défini par :

$$e_{B/A} := \ell_B(B/\mathfrak{m}B).$$

On suppose qu'il est fini. Soit M un A-module de longueur finie. Montrer que :

$$\ell_B(M \otimes_A B) \leq e_{B/A}\ell_A(M).$$

Montrer qu'il y a égalité si B est plat sur A.

Exercice 6 : Longueur et torsion

Soient A un anneau et M un A-module de type fini. Soit $a \in A$. Lorsque M/aM et $M[a]$ sont de longueur finie sur A, on pose :

$$e_A(a, M) = \ell_A(M/aM) - \ell_A(M[a]).$$

1. Montrer que, si M est de longueur finie, alors $e_A(a, M)$ est bien défini et est nul.

2. Soit I un idéal de A tel que $IM = 0$. Montrer que $e_A(a, M) = e_{A/I}(\overline{a}, M)$ où $\overline{a}$ est l'image de a dans A/I.

3. Soit $0 \to M \to N \to P \to 0$ une suite exacte de A-modules de type fini. Montrer que si deux des entiers $e_A(a, M)$, $e_A(a, N)$ et $e_A(a, P)$ sont bien définis, le troisième l'est aussi, et que dans ce cas :

$$e_A(a, N) = e_A(a, M) + e_A(a, P).$$

Exercice 7 : Idéaux premiers associés

Soit A un anneau noethérien. Soit M un A-module. On dit qu'un idéal premier de A est **associé à** M s'il est de la forme $\mathrm{Ann}(m)$ pour un certain $m \in M$. On note $\mathrm{Ass}_A(M)$ (ou $\mathrm{Ass}(M)$ s'il n'y a pas d'ambigüité) l'ensemble des idéaux premiers associés à M.

1. Montrer que $\mathrm{Ass}(M) = \emptyset$ si, et seulement si, $M = 0$.

2. Soit S une partie multiplicative de A. Montrer que $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$ est constitué des idéaux premiers de la forme $S^{-1}\mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$ et $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.

3. Montrer que l'ensemble des diviseurs de zéro dans A est :

$$\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)} \mathfrak{p}.$$

4. Montrer que tout idéal premier minimal de A est dans $\mathrm{Ass}(A)$. L'ensemble $\mathrm{Ass}(A)$ coïncide-t'il toujours avec l'ensemble des idéaux premiers minimaux ?

5. Supposons que M est un module de type fini sur A. Montrer qu'il existe des sous-modules :

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M$$

de M tels que, pour chaque i, le quotient M_i/M_{i+1} est isomorphe à $A/\mathfrak{p}_i$ pour un idéal premier $\mathfrak{p}_i$ de A.

6. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Ass}(M)$ est fini.

Exercice 8 : Modules artiniens et noethériens

Soient A un anneau et M un A-module. On dit que M est artinien si toute suite décroissante de sous-A-modules de M stationne. Montrer que M est de longueur finie si, et seulement si, M est noethérien et artinien.

Exercice 9 : Lemme de Nakayama

Soient A un anneau commutatif unitaire. Soient I un idéal de A contenu dans le radical de Jacobson de A, et M un A-module de type fini.

1. Montrer que si on a $IM = M$, alors M est le module nul.

Le cas le plus courant d'utilisation est le cas local. Supposons donc de plus A local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit N un sous-A-module de M.

2. Montrer que si on a $M = N + \mathfrak{m}M$, alors N est égal à M.

Exercice 10 : Application du lemme de Nakayama

Soient A un anneau commutatif local et M un A-module de type fini.

1. En utilisant le lemme de Nakayama, montrer que les familles génératrices minimales de M ont même cardinal.

2. Rappeler un contre-exemple d'une telle affirmation pour un $\mathbb{Z}$-module.

Exercice 11 : Semi-continuité de la dimension

Soient A un anneau commutatif unitaire et M un A-module de type fini. Soient $X = \mathrm{Spec}\, A$ et

$$d : \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{N} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \dim_{k(\mathfrak{p})} M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}} \end{array}.$$

Soient $\mathfrak{p} \in X$ et $n = d(\mathfrak{p})$. Soit $\alpha : k(\mathfrak{p})^n \to M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$ un isomorphisme de $k(\mathfrak{p})$-espaces vectoriels.

On commence par établir l'existence du diagramme commutatif suivant (pour un certain $f \in A \setminus \mathfrak{p}$).

$$\begin{tikzcd} A[f^{-1}]^n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\gamma"] & A_{\mathfrak{p}}^n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\beta"] & k(\mathfrak{p})^n \arrow[d, "\alpha"] \\ M[f^{-1}] \arrow[r] & M_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}} \end{tikzcd}$$

1. Montrer que α se relève en une surjection $\beta : A_{\mathfrak{p}}^n \to M_{\mathfrak{p}}$ de $A_{\mathfrak{p}}$-modules.

2. Montrer qu'il existe $f \notin \mathfrak{p}$ tel que β se relève en une surjection $\gamma : A[f^{-1}]^n \to M[f^{-1}]$ de $A[f^{-1}]$-modules.

3. En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un idéal I de A tel que l'ensemble $\{\mathfrak{p} \in X \mid d(\mathfrak{p}) \geq n\}$ est l'ensemble des idéaux premiers de A contenant I.

Remarque : Pour I idéal de A, notons $V(I)$ l'ensemble des idéaux premiers de A contenant I. On peut munir X de la topologie dont les fermés sont les $V(I)$: c'est la topologie de Zariski sur X. L'exercice précédent montre alors que d est semi-continue supérieurement sur X.