TD 9 : Fonctions spéciales 1

Aucun exercice à préparer à la maison dans cette feuille !

Exercice 1:

1. On note $f(z) = \tan(z) - z$. Où sont les pôles de f ? Où sont les zéros de f sur l'axe réel ? A l'aide du contour C_N délimitant le carré centré en l'origine de côtés de longueur $2\pi N$ ($N \geq 1$ entier), montrer que toutes les solutions de l'équation $\tan(z) = z$ sont réelles.
2. On note x_n l'unique solution de l'équation $\tan(x) = x$ dans l'intervalle $\left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{10}.$$

On rappelle que la fonction Γ est définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

avec $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$.

Exercice 2:

1. Montrer que

$$\left(\Gamma'/\Gamma\right)'(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n\geq 1} \frac{(1+1/n)^z}{1+z/n} = \lim_{N\to+\infty} \frac{N^z N!}{z(z+1)\ldots(z+N)}.$$

3. A l'aide de la question précédente, montrer que la fonction Γ satisfait les équations

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/k)\ldots\Gamma(z+(k-1)/k) = (2\pi)^{(k-1)/2} k^{1/2-kz} \Gamma(kz),$$

pour tout entier $k \geq 2$.

Exercice 3: Soient $a_1, \ldots, a_r$ des nombres complexes distincts, et soient $m_1, \ldots, m_r$ des entiers. On suppose que :

$$h(z) = \prod_{i=1}^{r} \Gamma(z + a_i)^{m_i}$$

est une fonction entière qui ne s'annule pas. Montrer que $m_i = 0$ pour tout i.

Exercice 4: Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. On considère la série :

$$f(s) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

1. Montrer que si $f(s)$ converge pour un certain s tel que $\mathrm{Re}(s) = \sigma_0$, alors $f(s)$ converge pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$.
2. On suppose qu'il existe C et $\sigma_1 > 0$ tel que :

$$|a_1 + \ldots + a_n| \leq C n^{\sigma_1}$$

pour tout n. Montrer que $f(s)$ converge pour $\mathrm{Re}(s) > \sigma_1$.

3. On suppose qu'il existe un nombre complexe ρ et $\sigma_1 \in [0,1[$ tels que $a_1 + ... + a_n = n\rho + O(n^{\sigma_1})$. D'après la question précédente, la série f converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. Montrer que f s'étend en une fonction méromorphe sur $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > \sigma_1\}$. Montrer que le seul pôle de ce prolongement est 1 et qu'il est simple.

On rappelle que la fonction ζ est définie par :

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

lorsque $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Exercice 5: Montrer qu'il existe une unique suite $(B_k)_{k\geq 0}$ de nombres complexes telle que pour tout $z \in D(0, 2\pi)$,

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} z^k$$

On les appelle les nombres de Bernoulli. Montrer qu'ils sont rationnels en donnant une formule permettant de les calculer par récurrence. En développant en série entière autour de 0 la fonction $z \mapsto \pi \cot(\pi z) - 1/z$, montrer que pour tout $k \geq 1$,

$$\zeta(2k) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}.$$

Calculer en particulier $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6)$.