Td n° 9 d'Analyse fonctionnelle

Equations elliptiques

Séance du 9 mai 2012

Exercice 1. *Inégalité de Poincaré-Wirtinger*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On suppose Ω borné et connexe. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

où $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u$.

Indication : On pourra raisonner par l'absurde.

⋆

Exercice 2. *Problème de Neumann*

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

On dit que u est *solution faible* de (1) si $u \in H^1(\Omega)$ et pour tout $v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega (\nabla u, \nabla v) + \int uv = \int_\Omega fv.$$

1. Montrer que si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ et $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, alors u est solution faible de (1) si et seulement si u est solution classique de (1).

2. Montrer qu'il existe une unique solution faible de (1) et donner une caractérisation de ce problème en terme de minimisation.

3. On suppose Ω connexe. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

admette une solution faible. Déterminer l'ensemble des solutions dans ce cas.

(Indication : On pourra introduire $H^1_K(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \int_\Omega u = 0\}$.)

⋆

Exercice 3. *Problème de Dirichlet hétérogène*

Soient $A = (a_{ij}(x)) \in L^\infty(\Omega, M_d(\mathbb{R})$ une matrice telle qu'il existe $C, \alpha > 0$ tels que

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = A(x)(\xi,\xi) \leq C|\xi|^2.$$

Soit $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ et $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur linéaire défini par

$$\begin{aligned} Lu &= - \div (A(x)\nabla u) + (b(x), \nabla u) + c(x)u \\ &= - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i} \left(a_{ij}(x) \partial_{x_j} u \right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \partial_{x_i} u + c(x)u. \end{aligned}$$

Étant donné $f \in H^{-1}(\Omega)$, on cherche à résoudre le problème

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \Omega, \\ u = 0 & \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

On dit que u est une *solution faible* de (3) si $u \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega A(x)(\nabla u, \nabla \phi) + \int (b(x), \nabla u)\phi + \int (c(x) + \mu) u \phi = f(\phi).$$

1. Montrer qu'il existe $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\mu \geq \mu_0$, pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe une unique solution faible de (3).

2. Soit $\mu \geq \mu_0$, on note Tf cette solution. Montrer que T est un endomorphisme compact de $L^2(\Omega)$.

3. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ quelconque. Montrer que pour $f = 0$, l'ensemble des solutions faibles de (3) est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $L^2(\Omega)$, qu'on note d. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$ de dimension d tel que (3) admet une solution si et seulement si $f \in F^\perp$.

⋆

Exercice 4. *Un problème elliptique non-linéaire*

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, et $p > 1$. Étant donné $g \in H^1(\Omega)$, on cherche à résoudre, pour $u \in H^1(\Omega)$, l'équation

$$\begin{cases} \Delta u = |u|^{p-1} u & \Omega, \\ u = g & \partial\Omega. \end{cases} \tag{$*$}$$

On introduit

$$H_g^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) |\, u|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega} \}.$$

1. Expliquer pourquoi $H_g^1(\Omega)$ est bien défini (non vide), et montrer que $H_g^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ si $p \leq \frac{d+2}{d-2}$.

2. Soit J la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1} \int_\Omega |u|^{p+1}.$$

Soit $u_n \in H_g^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ une suite de minimiseurs de J, i.e une suite vérifiant

$$J(u_n) \to \inf_{v \in H_g^1(\Omega)} J(v).$$

Montrer qu'il existe $u \in H_g^1(\Omega)$ réalisant le minumum et tel que quitte à extraire, $u_n - u \rightharpoonup 0$ dans $H_0^1(\Omega)$-faible et $L^{p+1}(\Omega)$-faible.

Montrer qu'un tel minimiseur est unique.

3. En déduire que u est une solution faible de $(*)$.

⋆

Exercice 5. *Problème elliptique avec contrainte intégrale*

Soit Ω un ouvert borné connexe et régulier de $\mathbb{R}^d$. Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière. On note $g = G'$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout x dans $\mathbb{R}$:

$$|g(x)| \leq C(|x| + 1)$$

On note pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ les fonctionnelles définies par :

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2,$$

$$J(u) = \int_\Omega G(u).$$

On introduit $\mathcal{A}$ le sous-ensemble de $H_0^1(\Omega)$:

$$\mathcal{A} = \{w \in H_0^1(\Omega) | J(w) = 0\}.$$

1. Supposons que $\mathcal{A}$ soit non vide. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ satisfaisant :

$$I(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} I(w).$$

2. Soit u un minimiseur du problème précédent. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v dx = \lambda \int_\Omega g(u) v dx.$$

⋆