Td n° 9 d'Analyse fonctionnelle

Distributions et Convolution

Séance du 9 Avril 2015

Exercice 1. *Distributions qui sont régulières*

1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $1 < p < \infty$. On suppose que :

$$\sup_{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|T(\phi)|}{\|\phi\|_{L^p}} < \infty.$$

Montrer que T s'identifie à une fonction de L^q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(]0,1[)$, tel que T' s'identifie à une fonction de $L^2(]0,1[)$. Montrer que T s'identifie à une fonction $u \in L^2(]0,1[)$. En déduire que que $u \in C^0([0,1])$.

3. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que T' s'identifie à une fonction f continue. Montrer que T s'identifie à une fonction $g \in C^1$ et que $g' = f$.

4. Soient $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C(\mathbb{R})$, tels que au sens des distributions, on a : $u' + au = f$. Montrer que $u \in C^1(\mathbb{R})$ et donc que l'équation précédente à lieu au sens classique.

⋆

Exercice 2. *Petits calculs de convolutions*

1. Soit $H = \mathbb{1}_{x \geq 0}$. Montrer que $H' = \delta$.

2. Calculer les convolutions suivantes (après en avoir justifié l'existence) :

$$\begin{array}{l} \delta_a * H, \quad \delta' * \mathbb{1}, \quad (x^m \delta_0^{(n)}) * (x^p \delta_0^{(q)}), \quad (\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'', \\ T * \mathbb{1}, \quad T * \exp, \quad \text{où } T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}). \end{array}$$

3. Comparer $(\mathbb{1} * \delta') * H$ et $\mathbb{1} * (\delta' * H)$. Qu'en conclure ?

4. Trouver $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

⋆

Exercice 3. *Fonction test*

Soit $a > 0$. On note $H_a(x) = \frac{1}{a}(H - \delta_a * H)$

1. Montrer que si $u \in C^k(\mathbb{R})$, alors $u * H_a \in C^{k+1}$.

2. Montrer que pour $u \in L^1(\mathbb{R})$, $\int u * H_a = \int u$.

On considère une suite (a_n), telle que $a_n > 0$, $a_n \geq a_{n+1}$ et $a = \sum a_n < \infty$. On pose $u_k = H_{a_0} * ... * H_{a_k}$.

3. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $u_k \in C^{k-1}$ et u_k est à support dans $[0, a_0 + ... + a_k]$.

4. Montrer les estimations suivantes

$$|u_k^{(j)}| \leq \frac{2^j}{a_0 ... a_j}, \quad \int |u_k^{(j)}| dx \leq \frac{2^j}{a_0 ... a_{j-1}}.$$

5. Montrer que les suites $u_k^{(j)}$ sont de Cauchy dans L^∞. En déduire que u_k converge vers une fonction u. Que peut-on dire de u ?

6. Existe-t-il des fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que $\forall n,\ |f^{(n)}(x)| \leq \frac{2^n}{n!}$?

7. Lemme de Borel : Soit b_n une suite quelconque de réels. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = b_n$.

⋆

Exercice 4. *Equations différentielles*

On appelle solution fondamentale d'une équation différentielle linéaire inhomogène

$$\sum_k a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t)$$

une distribution u telle que $\sum_k a_k u^{(k)} = \delta_0$. On en déduit alors une solution pour $f(t)$, en considérant $u * f$ (si c'est possible).

On introduit $\mathcal{D}'_+ = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) |\ \mathrm{Supp}(u) \subset \mathbb{R}^+\}$.

1. Expliquer pourquoi il est possible de convoler deux distributions de $\mathcal{D}'_+$. En déduire que $\mathcal{D}'_+$ forme une algèbre commutative pour $*$, d'élément neutre δ_0.

On notera u^{*n} la n-ième puissance de u, pour $n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{Z}$ si u est inversible).

2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\delta_0' - \lambda\delta_0$ est inversible, et que : $(\delta_0' - \lambda\delta_0)^{*-1} = H(t)e^{\lambda t}$.

3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(\delta_0' - \lambda\delta_0)^{*-n} = H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}$.

4. En déduire que toute équation différentielle linéaire à coefficients constants admet une solution fondamentale dans $\mathcal{D}'_+$.

⋆

Exercice 5. *Propriété de la moyenne*

Soit $n \geq 2$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f \in C^0(\Omega)$ vérifie la propriété de la moyenne si :

$$\forall x \in \Omega, r > 0 \text{ tels que } B(x,r) \subset \Omega, \quad f(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} f(s) ds.$$

1. Montrer qu'une fonction f de classe C^2 vérifiant la propriété de la moyenne satisfait : $-\Delta f = 0$.

Indication : On pourra faire un développement de Taylor de f à l'ordre 2.

2. En déduire que si $f \in C^0$ vérifie la propriété de la moyenne, alors $-\Delta f = 0$ au sens des distributions.

3. Réciproquement, montrer que si $f \in \mathcal{C}^\infty$ satisfait $-\Delta f = 0$, alors f vérifie la propriété de la moyenne.

Indication : On peut calculer $\int_{B(0,r)} f \Delta(|x|^2 - r^2)$.

4. Montrer que si une distribution T satisfait $-\Delta T = 0$ alors T s'identifie à une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et satisfait le propriété de la moyenne.

Indication : On pourra considérer des approximation de l'unité ϕ_m, montrer que $\phi_m * T$ satisfait la propriété de la moyenne et converge uniformément sur les compacts. Pour cela on pourra considérer les fonctions $\phi_{x,r}(y) = \psi(|x-y|/r)$, $\psi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ fixée.

⋆