Analyse Complexe TD 9 (10/04 - 13/04)

Exercice 1 La fonction définie par $F(z) = (1-z)/(1+z)$ est un biholomorphisme entre le demi-plan de droite et le disque unité qui envoie 1 sur 0. La fonction $g = f \circ F^{-1}$ est donc une fonction du disque dans lui-même qui s'annule en zéro à l'ordre m. La fonction $h(z) = g(z)z^{-m}$ est donc holomorphe sur le disque unité. Par le principe du maximum, $|h(z)| \leq 1$. C'est exactement le résultat que l'on cherchait.

Exercice 2 Le but ici est de déterminer les couronnes qui sont biholomorphes entre elles. On se donne deux couronnes $C_1 = \{r_1 < |z| < R_1\}$ et $C_2 = \{r_2 < |z| < R_2\}$. On suppose que $R_{1,2} < \infty$.

1. si $r_1 R_2 = r_2 R_1$, on peut utiliser une homothétie ou une inversion.
   Réciproquement, on se donne φ un biholomorphisme entre C_1 et C_2.
2. On considère le bord $|z| = r_1$. Il a une base de voisinage connexes dans C_1. En particulier, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $|\varphi|$ quand $|z| \to r_1$ doit être connexe. C'est donc un segment de $[r_2, R_2]$. Comme φ est injective, aucun point de $]r_2, R_2[$ ne peut être dans l'adhérence. La limite existe donc, et c'est soit r_2 soit R_2. On suppose que c'est r_2, quitte à remplacer φ par $1/\varphi$.
3. Si $r_1 = 0$, on peut prolonger φ par effacement des singularités. D'après l'exercice 3 du TD 8, tous les points du disque de rayon R_2 ont le même nombre d'antécédents par φ, c'est à dire 1. Cela implique $r_2 = 0$ et $\varphi(0) = 0$. Pour la réciproque ($r_2 = 0$), on utilise le même argument pour φ^{-1}.
   Pour utiliser le lemme des 3 cercles d'Hadamard, on pose
   $$A(s) = \sup_{|z|=e^s} \log|\varphi(z)| \text{ et } B(l) = \sup_{|\varphi(z)|=e^l} \log|z|.$$
4. Il suffit d'utiliser la définition. Le maximum $B(l)$ est atteint en un z tel que $|\varphi(z)| = e^l$. On trouve que $A(B(l)) = \log\sup\{|\varphi(w)|, |w| = |z|\} \geq \log|\varphi z| = l$.
5. * On se donne $r_1 < r < R_1$. L'image du cercle de rayon r est une courbe γ qui sépare la couronne en deux composantes connexes (φ est un biholomorphisme). La composante qui touche $|z| = r_2$ est l'image par φ de $r_1 < |z| < r$. Si $|z| > \sup\{|w|,\ w \in \gamma\}$, alors z est dans l'autre composante connexe. En particulier, cela implique que si $s' < s = \log r$, alors $A(s') < A(s)$.
6. D'après le lemme des 3 cercles d'Hadamard, A et B sont convexe. De plus, A est croissante, donc $A \circ B$ est convexe. Mais $A \circ B$ est supérieure ou égale à la corde entre $\log r_2$ et $\log R_2$. Cela implique que $A \circ B$ est confondue avec sa corde sur cet intervalle. Comme il y a alors égalité dans les inégalités de convexité, on peut conclure que A et B sont affines.
7. * On se donne encore $r_1 < r < R_1$, on la courbe γ image de $|z| = r$ par φ. On note $a = \sup\{\log|z|,\ z \in \gamma\}$ et $a' = \inf\{\log|z|,\ z \in \gamma\}$. Pour $l \in [a, a']$, $B(l) \geq \log r$. Si $a \neq a'$, alors $B(a) > \log r$. Mais alors $A(B(a)) > A(\log r) = a$. Ainsi, $|\varphi(z)| = A(s)$ dès que $|z| = e^s$.
   De plus, étant donné que A est affine, il y a un λ réel tel que $|\varphi(z)| = K|z|^\lambda$. D'après les conditions de Cauchy-Riemann, ceci implique qu'à une constante de module 1 près, φ est une détermination de Kz^λ. Mais pour qu'une telle détermination existe sur toute la couronne, il faut que λ soit un entier relatif. Comme de plus φ est injective, on trouve bien $\lambda = \pm 1$.

Exercice 3 *Fonction de Joukowski* On constate facilement que $\phi(1/z) = \phi(z)$, et que chaque nombre complexe a exactement deux antécédents par ϕ (comptés avec multiplicité). On en déduit que ϕ est injective sur $\mathbb{D}$ et sur $\{|z| > 1\}$, et que $\phi(\mathbb{D}) = \phi(\{|z| > 1\} = \mathbb{C} \setminus \phi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Exercice 4 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0 et soit $f : \Omega \to \Omega$ holomorphe vérifiant $f(0) = 0$. On pose $\lambda = f'(0)$, et on suppose qu'on a $0 < |\lambda| < 1$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la n-ième itérée de la fonction f, et on pose $\varphi_n = \lambda^{-n} f_n$.
   a) Il suffit d'utiliser la continuité de f' et le fait que $|\lambda|^{1/2} > |\lambda|$.
   b) On calcule
   $$|\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| = \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} |f(f_n(z)) - \lambda f_n(z)|$$
   Il suffit donc d'appliquer un DL de f autour de zéro.
   c) D'après a) et b), la série $\sum \varphi_{n+1} - \varphi_n$ est normalement convergente sur un ouvert autour de zéro. Notons φ la limite.

2. D'après la construction de φ, on trouve directement que $f \circ \varphi = \lambda\varphi$, ce qui donne une conjugaison. Il suffit de vérifier que φ est un biholomorphisme autour de zéro. Mais tous les φ_n sont holomorphes avec $\varphi_n'(0) = 1$, donc φ est holomorphe, et $\varphi'(0) = 1$.

Exercice 5

1. Comme F est injective sur le disque, on note $U = F(\mathbb{D})$, et G la bijection réciproque. On considère aussi $g := G \circ f$. On trouve que g est holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ et s'annule en 0. Ainsi, $|g(z)| \leq |z|$ d'après le lemme de Schwarz. Autrement dit $f(z) \in F(D(0, |z|))$, ce qui implique la propriété annoncée.
2. Cette inégalité s'obtient avec l'inégalité $(1 - 1/n)^n \geq e^{-1}$.
3. On peut choisir $F(z) = 1 + [-i(z+i)/(z-i)]^2 = -4iz/(z-i)^2$ qui envoie le disque unité sur $\mathbb{C}$ privé de $[1, +\infty[$. On trouve alors que pour $r \to 1$, $\sup\{|F(z)|,\ |z| = r\} \sim 4/(1-r)^2$. On peut appliquer la question précédente.