Td n° 9 d'EDP

Espaces de Campanato

Séance du 5 décembre 2014

Exercice 1. *Théorème de différentiation de Lebesgue*

Pour tout borélien A, on note $|A|$ sa mesure de Lebesgue.

1. Soit Ω l'union d'une famille $\mathcal{B}$ de boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$ et $c < |\Omega|$. Montrer qu'il existe une suite finie $B_1, ..., B_k$ de boules disjointes de $\mathcal{B}$ telle que :

$$c < 3^n \sum_{i=1}^{k} |B_j|.$$

C'est le lemme de recouvrement de Vitali.

Pour toute fonction mesurable f appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et tout $r > 0$ on pose :

$$M_r f(x) := \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy.$$

La fonction maximale associée à f est définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$Mf(x) = \sup_{r>0} M_r|f|(x).$$

2. Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$[Mf]_1 \leq 3^n \|f\|_{L^1}.$$

où on a noté

$$[u]_1 = \sup_{\lambda \geq 0} \lambda \mu\{x| \, |u(x)| \geq \lambda\}.$$

Indication : On pourra utiliser le recouvrement de Vitali sur $S = \{x, M|f| \geq \lambda\}$.

3. Montrer que pour toute fonction mesurable $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{r \to 0^+} M_r f(x) = f(x).$$

(on pourra commencer par le cas où $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$)

⋆

Exercice 2. *Injection de Sobolev*

1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. On note

$$u_{x,r} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u.$$

Montrer que

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u_{x,r}|^p dy \leq Cr^p \int_{B(x,r)} |\nabla u|^p,$$

où C est une constante indépendante de x, r.

Indication : On pourra supposer $x = 0$ et faire un changement d'échelle en posant $v(y) = u(ry)$.

2. En utilisant le théorème de Campanato, en déduire que si $p > n$ alors $W^{1,p} \subset C^{0,\alpha}$ avec $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

⋆

Exercice 3. *Régularité dans les espaces de Campanato pour les solutions de problèmes elliptiques*

Supposons que $u \in H^1(\Omega)$ vérifie $div(A\nabla u) = 0$ où A est une matrice telle que

$$\lambda_1 |\xi|^2 \leq < A\xi, \xi > \leq \lambda_2 |\xi|^2.$$

1. Rappeler pourquoi

$$\forall \psi \in C_0^1(\Omega), \qquad \int \psi^2 |a\nabla u|^2 \, dx \leq C \int |u|^2 |\nabla \psi|^2 dx.$$

2. En déduire

$$\int_{B(x_0,R/2)} |\nabla u|^2 \, dx \leq C' \int_{B(x_0,R)\setminus B(x_0,R/2)} |u|^2 \, dx.$$

3. Montrer qu'il existe une constante θ telle que

$$\int_{B(x_0,R/2)} |\nabla u|^2 \, dx \leq \theta \int_{B(x_0,R)\setminus B(x_0,R/2)} |\nabla u|^2 \, dx.$$

4. En déduire

$$\int_{B(x_0,R/2)} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{\theta}{1+\theta} \int_{B(x_0,R)} |\nabla u|^2 \, dx.$$

5. Montrer que si $f \colon]0, R_0] \to \mathbb{R}$, croissante vérifie

$$f(R/2) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha f(R) \quad \forall R \leq R_0$$

alors

$$f(r) \leq 2^\alpha \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha f(R), \quad \forall 0 < r < R \leq R_0.$$

6. En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $u \in \mathcal{L}^{2,\alpha+2}_{loc}(\Omega)$.

7. Montrer que si $n = 2$ alors $v \in C^{0,\alpha/2}_{loc}(\Omega)$.

⋆