TD9 : Modules de longueur finie

Diego Izquierdo

L'exercice 0 est à préparer avant la séance.

Exercice 0 (à préparer) : TD8
Faire les exercices 0', 3 et 4 (seules les questions 1, 2 et 3 sont à préparer) du TD8.

Exercice 0' : TD8
Faire l'exercice 6 du TD8.

Exercice 1 : Exemples de modules de longueur finie

1. Soient A un anneau principal et x un élément de A. Quelle est la longueur de $A/(x)$ comme A-module ?

> **Indications :** Écrivons la décomposition de x en produit d'irréductibles :
>
> $$x = up_1 ... p_s$$
>
> avec $u \in A^\times$ et p_i irréductible pour chaque i. On a alors, pour chaque r, la suite exacte :
>
> $$0 \to (p_1...p_{r+1})/(x) \to (p_1...p_r)/(x) \to (p_1...p_r)/(p_1...p_{r+1}) \to 0.$$
>
> En remarquant que $(p_1...p_r)/(p_1...p_{r+1})$ est isomorphe à $A/(p_{r+1})$, on en déduit que :
>
> $$\ell(A/(x)) = \sum_{r=1}^{s} \ell(A/(p_r)).$$
>
> Mais $A/(p_r)$ est un A-module simple pour chaque r car (p_r) est un idéal maximal de A. On en déduit que $\ell(A/(p_r)) = 1$ pour chaque r et donc que $\ell(A/(x)) = s$.

2. Quelle est la longueur de $\mathbb{Z}[X]/(12, X^5 - 6)$ comme $\mathbb{Z}$-module ? Et comme $\mathbb{Z}[X]$-module ?

Indications : On remarque que $\mathbb{Z}[X]/(X^5-6)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 5. Par conséquent, $\mathbb{Z}[X]/(12, X^5-6)$ est un groupe abélien libre isomorphe à $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^5$. On en déduit que, en tant que $\mathbb{Z}$-module, on a :

$$\ell(\mathbb{Z}[X]/(12, X^5-6)) = \ell((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^5) = \ell(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^5 = 3^5 = 243.$$

Par ailleurs, On a un isomorphisme de $\mathbb{Z}[X]$-modules :

$$\mathbb{Z}[X]/(12, X^5-6) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]/(X^5) \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]/(X^5-2).$$

On a de plus une suite exacte :

$$0 \to \frac{(2, X^5)\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]}{(X^5-2)\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]/(X^5-2) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^5) \to 0.$$

Or on a un morphisme surjectif de $\mathbb{Z}[X]$-modules :

$$\mathbb{Z}[X] \to \frac{(2, X^5)\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]}{(X^5-2)\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]}, 1 \mapsto 2,$$

de noyau $(2, X^5)$. On en déduit que :

$$\frac{(2, X^5)\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]}{(X^5-2)\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^5),$$

puis que la longueur de $\mathbb{Z}[X]/(12, X^5-6)$ comme $\mathbb{Z}[X]$-module est :

$$\begin{aligned}
\ell(\mathbb{Z}[X]/(12, X^5-6)) &= \ell(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]/(X^5)) + \ell(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]/(X^5-2)) \\
&= 5 + \ell\left(\frac{(2, X^5)\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]}{(X^5-2)\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]}\right) + \ell(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^5)) \\
&= 5 + 2\ell(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^5)) \\
&= 5 + 2 \times 5 = 15.
\end{aligned}$$

Exercice 2 : Longueur d'un module

Soient A un anneau, M un A-module et M_1 et M_2 deux sous-A-modules de M. Montrer que :

$$\ell(M_1 + M_2) + \ell(M_1 \cap M_2) = \ell(M_1) + \ell(M_2).$$

Indications : On écrit la suite exacte :

$$0 \to M_1 \cap M_2 \to M_1 \oplus M_2 \to M_1 + M_2 \to 0.$$

On a alors :

$$\ell(M_1 + M_2) + \ell(M_1 \cap M_2) = \ell(M_1 \oplus M_2) = \ell(M_1) + \ell(M_2).$$

Exercice 3 : Endomorphismes d'un module de longueur finie

Soient A un anneau et M un A-module de longueur finie. Soit f un endomorphisme de M. Montrer que f est injectif si, et seulement si, il est surjectif.

Exercice 4 : Longueur et restriction des scalaires
Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux et M un B-module. On note $\ell_A(M)$ (resp. $\ell_B(M)$) la longueur de M en tant que A-module (resp. B-module). Montrer que, si f est surjectif, alors $\ell_A(M) = \ell_B(M)$. Le résultat subsiste-t'il si f n'est pas supposé surjectif ?

> **Indications :** Si f est surjectif, les suites de A-modules $0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq M$ sont aussi des suites de B-modules, donc $\ell_A(M) = \ell_B(M)$.
>
> En général, on a $\ell_A(M) \geq \ell_B(M)$, mais l'égalité n'est pas toujours vraie : par exemple, en prenant $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{C}$ et $M = \mathbb{C}$, on a $\ell_{\mathbb{R}}(M) = \dim_{\mathbb{R}} M = 2$ et $\ell_{\mathbb{C}}(M) = \dim_{\mathbb{C}} M = 1$.

Exercice 5 : Longueur et extension des scalaires
Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux locaux. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. On considère l'indice de ramification de B sur A, défini par :

$$e_{B/A} := \ell_B(B/\mathfrak{m}B).$$

On suppose qu'il est fini. Soit M un A-module de longueur finie. Montrer que :

$$\ell_B(M \otimes_A B) \leq e_{B/A}\ell_A(M).$$

Montrer qu'il y a égalité si B est plat sur A.

> **Indications :** On procède par récurrence sur $\ell_A(M)$. Si $\ell_A(M) = 1$, comme A est un anneau local, on déduit que $M \cong A/\mathfrak{m}$: on a alors $M \otimes_A B = B/\mathfrak{m}B$, et donc $\ell_B(M \otimes_A B) = e_{B/A}\ell_A(M)$.
>
> Supposons le résultat prouvé pour $\ell_A(M) \leq \ell$, et supposons que $\ell_A(M) = \ell + 1$. Soit N un sous-module de M différent de 0 et de M. Par hypothèse de récurrence, on a alors $\ell_B(N \otimes_A B) \leq e_{B/A}\ell_A(N)$ et $\ell_B(M/N \otimes_A B) \leq e_{B/A}\ell_A(M/N)$. La suite exacte :
>
> $$N \otimes_A B \to M \otimes_A B \to M/N \otimes_A B \to 0 \qquad (\star)$$
>
> montre alors que :
>
> $$\begin{aligned} \ell_B(M \otimes_A B) &\leq \ell_B(N \otimes_A B) + \ell_B(M/N \otimes_A B) \\ &\leq e_{B/A}(\ell_A(N) + \ell_A(M/N)) = e_{B/A}\ell_A(M). \end{aligned}$$
>
> Lorsque B est plat, dans la suite exacte $(\star)$, le morphisme $N \otimes_A B \to M \otimes_A B$ est injectif, et donc la même récurrence montre que toutes les inégalités deviennent des égalités.

Exercice 6 : Longueur et torsion
Soient A un anneau et M un A-module de type fini. Soit $a \in A$. Lorsque

M/aM et $M[a]$ sont de longueur finie sur A, on pose :

$$e_A(a, M) = \ell_A(M/aM) - \ell_A(M[a]).$$

1. Montrer que, si M est de longueur finie, alors $e_A(a, M)$ est bien défini et est nul.

> **Indications :** On écrit la suite exacte :
>
> $$0 \to M[a] \to M \to M \to M/aM \to 0$$
>
> induite par la multiplication par a. On a alors :
>
> $$e_A(a, M) = \ell_A(M) - \ell_A(M) = 0.$$

2. Soit I un idéal de A tel que $IM = 0$. Montrer que $e_A(a, M) = e_{A/I}(\overline{a}, M)$ où $\overline{a}$ est l'image de a dans A/I.

> **Indications :** En utilisant l'exercice 4, on remarque que $\ell_A(M/aM) \cong \ell_{A/I}(M/\overline{a}M)$ et $\ell_A(M[a]) \cong \ell_{A/I}(M[\overline{a}])$.

3. Soit $0 \to M \to N \to P \to 0$ une suite exacte de A-modules de type fini. Montrer que si deux des entiers $e_A(a, M)$, $e_A(a, N)$ et $e_A(a, P)$ sont bien définis, le troisième l'est aussi, et que dans ce cas :

$$e_A(a, N) = e_A(a, M) + e_A(a, P).$$

> **Indications :**

Exercice 7 : Idéaux premiers associés

Soit A un anneau noethérien. Soit M un A-module. On dit qu'un idéal premier de A est **associé à** M s'il est de la forme $\mathrm{Ann}(m)$ pour un certain $m \in M$. On note $\mathrm{Ass}_A(M)$ (ou $\mathrm{Ass}(M)$ s'il n'y a pas d'ambigüité) l'ensemble des idéaux premiers associés à M.

1. Montrer que $\mathrm{Ass}(M) = \emptyset$ si, et seulement si, $M = 0$.

> Voir le lemme 1.2 du chapitre 7 du livre *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* de Qing Liu.

2. Soit S une partie multiplicative de A. Montrer que $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$ est constitué des idéaux premiers de la forme $S^{-1}\mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$ et $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.

> Voir le lemme 1.2 du chapitre 7 du livre *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* de Qing Liu.

3. Montrer que l'ensemble des diviseurs de zéro dans A est :

$$\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)} \mathfrak{p}.$$

> Voir le corollaire 1.3 du chapitre 7 du livre *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* de Qing Liu.

4. Montrer que tout idéal premier minimal de A est dans $\mathrm{Ass}(A)$. L'ensemble $\mathrm{Ass}(A)$ coïncide-t'il toujours avec l'ensemble des idéaux premiers minimaux ?

> Pour la première partie de la question, voir le corollaire 1.3 du chapitre 7 du livre *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* de Qing Liu. Pour la deuxième partie, la réponse est non : il suffit de choisir, par exemple, $A = \mathbb{C}[X,Y]/(XY, Y^2)$, et de remarquer que (X,Y) est dans $\mathrm{Ass}(A)$ mais n'est pas un idéal premier minimal.

5. Supposons que M est un module de type fini sur A. Montrer qu'il existe des sous-modules :

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_r = M$$

de M tels que, pour chaque i, le quotient M_i/M_{i+1} est isomorphe à $A/\mathfrak{p}_i$ pour un idéal premier $\mathfrak{p}_i$ de A.

> Voir le lemme 1.4 du chapitre 7 du livre *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* de Qing Liu.

6. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Ass}(M)$ est fini.

> Voir le corollaire 1.5 du chapitre 7 du livre *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* de Qing Liu.

Exercice 8 : Modules artiniens et noethériens

Soient A un anneau et M un A-module. On dit que M est artinien si toute suite décroissante de sous-A-modules de M stationne. Montrer que M est de longueur finie si, et seulement si, M est noethérien et artinien.

> Si M est de longueur finie, il est clair que M est noethérien et artinien. Réciproquement, supposons M noethérien et artinien. Comme M est artinien, $M = 0$ ou M contient un sous-module simple M_1. Le module M/M_1 étant artinien, $M/M_1 = 0$ ou M/M_1 contient un sous-module simple. En continuant ainsi, on construit une suite de sous-modules $M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq ...$ de M dont les quotients successifs sont des A-modules simples (donc de longueur 1). Cette suite doit stationner car M est noethérien. Cela prouve que M est de longueur finie.

Exercice 9 : Lemme de Nakayama

Soient A un anneau commutatif unitaire. Soient I un idéal de A contenu dans le radical de Jacobson de A, et M un A-module de type fini.

1. Montrer que si on a $IM = M$, alors M est le module nul.

> Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Notons $I_\mathfrak{m}$ l'idéal $IA_\mathfrak{m}$ de $A_\mathfrak{m}$. Il est contenu dans $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$. Comme $IM = M$, on a aussi $I_\mathfrak{m}M_\mathfrak{m} = M_\mathfrak{m}$. Le lemme de Nakayama vu en cours montre alors que $M_\mathfrak{m} = 0$. Cela étant vrai pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, on a $M = 0$ (cf. exercice 13 du TD7).

Le cas le plus courant d'utilisation est le cas local. Supposons donc de plus A local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit N un sous-A-module de M.

2. Montrer que si on a $M = N + \mathfrak{m}M$, alors N est égal à M.

> Soit $P = M/N$. L'égalité $M = N + \mathfrak{m}M$ signifie que $P/\mathfrak{m}P = 0$. Le lemme de Nakayama implique alors que $P = 0$. Autrement dit, $M = N$.

Exercice 10 : Application du lemme de Nakayama

Soient A un anneau commutatif local et M un A-module de type fini.

1. En utilisant le lemme de Nakayama, montrer que les familles génératrices minimales de M ont même cardinal.

> Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Prenons une famille génératrice minimale $(m_i)_{i\in I}$ de M. Une telle famille existe car M possède une famille génératrice finie. On a donc une flèche surjective $f : A^{(I)} \twoheadrightarrow M$, qui induit une surjection $\overline{f} : A^{(I)}/\mathfrak{m}A^{(I)} \twoheadrightarrow M/\mathfrak{m}M$. Montrons que $\overline{f}$ est un isomorphisme : si ce n'était pas le cas on aurait $J \subsetneq I$ tel que $(\overline{m}_j)_{j\in J}$ est une base du $(A/\mathfrak{m})$-espace vectoriel $M/\mathfrak{m}M$. Par le lemme de Nakayama, $g : A^{(J)}/\mathfrak{m}A^{(J)} \xrightarrow{\sim} M/\mathfrak{m}M$ se relèverait en une surjection $\widetilde{g} : A^J \twoheadrightarrow M$ et $(m_j)_{j\in J}$ est une sous-famille génératrice stricte de $(m_i)_{i\in I}$. C'est absurde. Donc $\overline{f}$ est un isomorphisme et le cardinal de I est fini, égal à $\dim_{A/\mathfrak{m}} M/\mathfrak{m}M$.

2. Rappeler un contre-exemple d'une telle affirmation pour un $\mathbb{Z}$-module.

> Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ est engendré par (1) mais aussi par $(2,3)$.

Exercice 11 : Semi-continuité de la dimension

Soient A un anneau commutatif unitaire et M un A-module de type fini. Soient $X = \operatorname{Spec} A$ et

$$d : \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{N} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \dim_{k(\mathfrak{p})} M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p} \end{array}.$$

Soient $\mathfrak{p} \in X$ et $n = d(\mathfrak{p})$. Soit $\alpha : k(\mathfrak{p})^n \to M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$ un isomorphisme de $k(\mathfrak{p})$-espaces vectoriels.

On commence par établir l'existence du diagramme commutatif suivant (pour un certain $f \in A \setminus \mathfrak{p}$).

$$\begin{tikzcd} A[f^{-1}]^n \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & A_\mathfrak{p}^n \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta"] & k(\mathfrak{p})^n \arrow[d, "\alpha"] \\ M[f^{-1}] \arrow[r] & M_\mathfrak{p} \arrow[r] & M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

1. Montrer que α se relève en une surjection $\beta : A_\mathfrak{p}^n \to M_\mathfrak{p}$ de $A_\mathfrak{p}$-modules.

> On peut naturellement relever α en $\beta : A_\mathfrak{p}^n \to M_\mathfrak{p}$ de $A_\mathfrak{p}$-modules. Comme M est de type fini sur A, $M_\mathfrak{p}$ est de type fini sur $A_\mathfrak{p}$: la surjectivité de β suit alors par lemme de Nakayama.

2. Montrer qu'il existe $f \notin \mathfrak{p}$ tel que β se relève en une surjection $\gamma : A[f^{-1}]^n \to M[f^{-1}]$ de $A[f^{-1}]$-modules.

Pour tout $f \notin \mathfrak{p}$, on a une flèche $A[f^{-1}] \to A_{\mathfrak{p}}$. Comme $M_{\mathfrak{p}}$ est de type fini sur $A_{\mathfrak{p}}$, il est généré par $m_1/f_1, \ldots, m_r/f_r$ pour des $f_i \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$. En prenant $f = f_1 \cdots f_r \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$ on peut définir $\gamma : A[f^{-1}]^n \to M[f^{-1}]$ via $(a_i)_i \mapsto \sum_i a_i f_1 \cdots \widehat{f_i} \cdot f_r m_i/f$ dont on vérifie facilement qu'il est bien défini et relève β. Les $m_i/1$ représentent une base de $M[f^{-1}]$ et on a $\gamma(0, \ldots, 0, f_i, 0, \ldots, 0) = m_i/1$, d'où la surjectivité de γ.

3. En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un idéal I de A tel que l'ensemble $\{\mathfrak{p} \in X \mid d(\mathfrak{p}) \geq n\}$ est l'ensemble des idéaux premiers de A contenant I.

Soit
$$I = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in X \\ d(\mathfrak{p}) \geq n}} \mathfrak{p}.$$
Bien sûr, tout élément de $\{\mathfrak{p} \in X \mid d(\mathfrak{p}) \geq n\}$ contient I. Réciproquement, soit $\mathfrak{p} \in X$ tel que $d(\mathfrak{p}) \leq n - 1$. D'après la question 2, il existe $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que, pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ ne contenant pas f, on a $d(\mathfrak{q}) \leq n - 1$. Autrement dit, $f \in I$. On en déduit que $\mathfrak{p}$ ne contient pas I.

Remarque : Pour I idéal de A, notons $V(I)$ l'ensemble des idéaux premiers de A contenant I. On peut munir X de la topologie dont les fermés sont les $V(I)$: c'est la topologie de Zariski sur X. L'exercice précédent montre alors que d est semi-continue supérieurement sur X.