

TD9 : THÉORIE DE GALOIS II

Diego Izquierdo

Nous avons traité les exercices 0, 1, 5, 12 et 20. Nous n'avons pas eu le temps de traiter l'exercice 16 : j'ai donc mis un corrigé de cet exercice.

Exercice 0 (à préparer) : Questions (iii), (v), (vi), (xiii) et (xvi) de l'exercice 7 du TD8

Exercice 1 (à préparer) : Sous-corps d'un corps cyclotomique
Faire la liste des sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_{20})$.

Exercice 2 : Sous-extensions de degré 3 d'extensions cyclotomiques

- Déterminer l'entier positif minimal n tel que l'extension $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ contient une sous-extension E de degré 3. Montrer que cette sous-extension est unique.

Indications : Le groupe de Galois de $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ est $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Ce groupe possède un sous-groupe d'indice 3 si, et seulement si, $9|n$ ou n possède un diviseur premier congru à 1 modulo 3. En invoquant la théorie de Galois, on déduit que l'entier n recherché est 7. Comme $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ possède un unique sous-groupe d'indice 3, la sous-extension E est unique.

- Montrer que E/\mathbb{Q} est galoisienne et exhiber un polynôme unitaire irréductible à coefficients entiers dont c'est le corps de décomposition.

Indications : Le sous-groupe d'indice 3 de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est distingué. La théorie de Galois montre donc que E/\mathbb{Q} est galoisienne de degré 3. Par ailleurs, on remarque que $E = \mathbb{Q}(\zeta_7) \cap \mathbb{R}$, puisque E est le sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ fixé par la conjugaison complexe. On vérifie immédiatement que $E = \mathbb{Q}(\beta)$ où $\beta = \zeta_7 + \zeta_7^{-1}$. Le polynôme minimal de β sur \mathbb{Q} est $X^3 + X^2 - 2X - 1$. Donc E est le corps de décomposition du polynôme irréductible $X^3 + X^2 - 2X - 1$.

Exercice 3 : Irréductibilité des polynômes cyclotomiques

Soient m et n deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que Φ_n est irréductible dans $\mathbb{Q}(\zeta_m)$.

Indications : Comme m et n sont premiers entre eux, on remarque que $\mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_{mn})$. On a alors :

$$\begin{aligned} \varphi(mn) &= [\mathbb{Q}(\zeta_{mn}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta_m)(\zeta_n) : \mathbb{Q}(\zeta_m)][\mathbb{Q}(\zeta_m) : \mathbb{Q}] \\ &= \varphi(m)[\mathbb{Q}(\zeta_m)(\zeta_n) : \mathbb{Q}(\zeta_m)]. \end{aligned}$$

Comme m et n sont premiers entre eux, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, et donc $[\mathbb{Q}(\zeta_m)(\zeta_n) : \mathbb{Q}(\zeta_m)] = \varphi(n)$. On en déduit que Φ_n est irréductible dans $\mathbb{Q}(\zeta_m)$.

Exercice 4 : Examen 2014

Soit $n > 2$. Soient $K_n = \mathbb{Q}(\zeta_{2^n})$ et $K_n^\pm = \mathbb{Q}(\zeta_{2^n} \pm \zeta_{2^n}^{-1})$.

1. Identifier les groupes $\text{Gal}(K_n/\mathbb{Q})$ et $\text{Gal}(K_n^\pm/\mathbb{Q})$.

Indications : On a $\text{Gal}(K_n/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$, le deuxième isomorphisme étant donné par :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times, (a, b) \mapsto (-1)^a 5^b.$$

Par cet isomorphisme, K_n^+ est le sous-corps fixé par $(1, 0)$ et K_n^- est le sous-corps fixé par $(1, 2^{n-3})$. On a donc :

$$\text{Gal}(K_n^+/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\}) \cong \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$$

et

$$\text{Gal}(K_n^-/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z})/\langle(1, 2^{n-3})\rangle \cong \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}.$$

2. Montrer que l'on a, pour chaque choix de $n - 3$ signes :

$$K_n^+ = \mathbb{Q} \left(\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{\dots \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}}} \right),$$

$$K_n^- = \mathbb{Q} \left(i \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{\dots \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}}} \right).$$

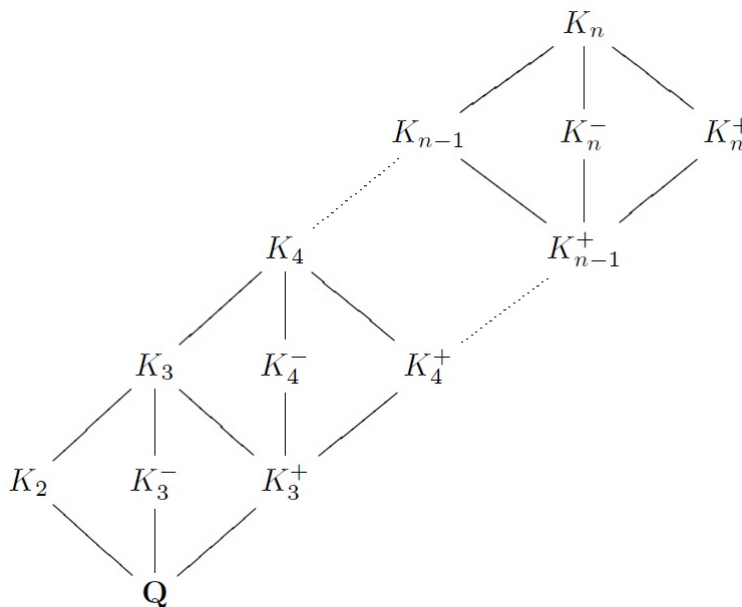
Indications : Faisons-le pour K_n^+ . Pour chaque $k \in (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$, on a $K_n^+ = \mathbb{Q}(\zeta_{2^n}^k + \zeta_{2^n}^{-k})$ et $K_n^- = \mathbb{Q}(\zeta_{2^n}^k - \zeta_{2^n}^{-k})$. Il suffit donc de montrer que, quel que soit le choix de signes, il existe $k \in (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$ tel que

$$\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{\dots \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}}} = \zeta_{2^n}^k + \zeta_{2^n}^{-k}.$$

Cela se prouve aisément par récurrence sur n .

3. Faire un diagramme représentant les sous-corps de K_n .

Indications : Les sous-groupes de $\text{Gal}(K_n/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$ sont les $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ pour $1 \leq k \leq n-2$, $0 \times \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ pour $0 \leq k \leq n-2$ et $\langle (1, 2^k) \rangle$ pour $0 \leq k \leq n-2$. La théorie de Galois permet alors d'affirmer que le treillis des sous-corps de K_n est :



Exercice 5 (à préparer sans la question 3(b)) : Sous-extensions quadratiques d'extensions cyclotomiques

1. Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Combien d'extensions quadratiques de \mathbb{Q} sont contenues dans $\mathbb{Q}(\zeta_n)$? Vérifier en particulier qu'il y en a 7 pour $n = 60$.
2. (a) Soit p un nombre premier impair. Calculer le discriminant de ϕ_p et en déduire que l'unique extension quadratique de \mathbb{Q} contenue dans $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ est $\mathbb{Q}\left(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\right)$.
 (b) Quelles sont les extensions quadratiques de \mathbb{Q} contenues dans $\mathbb{Q}(\zeta_8)$?
 (c) En déduire la liste des extensions quadratiques de \mathbb{Q} contenues dans $\mathbb{Q}(\zeta_{60})$.
3. (a) Montrer que toute extension quadratique de \mathbb{Q} est contenue dans une extension cyclotomique de \mathbb{Q} .
 (b) (*Difficile*) Soit $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ sans facteurs carrés. Soit n le plus petit entier naturel n tel que $\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\zeta_n)$. Montrer que $n = |d|$ si $d \equiv 1 \pmod{4}$ et que $n = 4|d|$ si $d \not\equiv 1 \pmod{4}$.

Exercice 6 : Polynômes cyclotomiques

Soient a et b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Le théorème de Dirichlet (1837) affirme qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels

que $p \equiv b \pmod{a}$. Le but de cet exercice est d'établir ce théorème dans le cas particulier où $b = 1$.

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble $\{d \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}, d \mid P(n)\}$ est infini.

Indications : Supposons cet ensemble Λ fini, égal à $\{m_1, \dots, m_r\}$. En particulier le coefficient constant α de P est non nul puisque sinon on aurait $n \mid P(n)$ pour tout $n \geq 1$. Dès lors $P(m_1 \cdots m_r \mid \alpha \mid n)$ s'écrit sous la forme $|\alpha|Q(n)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{Z}[X] \setminus \mathbb{Z}$ à coefficient constant valant ± 1 . Aussi, on a $Q(n) \equiv \pm 1 \pmod{m_k}$ pour tout $1 \leq k \leq r$. En prenant $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand, on a $|Q(n_0)| > 1$ et l'existence d'un diviseur de $Q(n_0)$ contredit la finitude de Λ .

2. Soit $P = \frac{X^a - 1}{\phi_a} \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer qu'il existe un nombre premier p et un entier x tels que p divise $\phi_a(x)$ mais pas $P(x)$.

Indications : Ecrivons $X^a - 1 = \Phi_a P$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Par identité de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ vérifiant $\Phi_a U + PV = 1$; en chassant les dénominateurs, on a un $m \in \mathbb{N}$ non nul et des $U_0, V_0 \in \mathbb{Z}[X]$ vérifiant $\Phi_a U_0 + PV_0 = m$ dans $\mathbb{Z}[X]$. D'après 1., il existe $x \in \mathbb{N}$ et p un diviseur premier de $\Phi_a(x)$ ne divisant pas m ; cela implique $p \nmid P(x)$.

3. Calculer l'ordre de x dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et en déduire que $p \equiv 1 \pmod{a}$.

Indications : On déduit de la question précédente que $x^a - 1 = 0 \in \mathbb{F}_p$ mais $x^d - 1 \neq 0 \in \mathbb{F}_p$ pour d un diviseur strict de a (on rappelle $P = \prod_{d \mid a, d \neq a} \Phi_d$). Il s'ensuit que l'ordre de x dans \mathbb{F}_p^\times est a et que $p - 1$ est donc divisible par a .

4. Conclure.

Indications : On suppose que l'ensemble des nombres premiers p tels que $p \equiv 1 \pmod{a}$ est fini. On le note $\{p_1, \dots, p_r\}$. On applique alors la démarche précédente avec $ap_1 \cdots p_r$ au lieu de a : cela permet de trouver un nombre premier $p_{r+1} \equiv 1 \pmod{ap_1 \cdots p_r}$. Absurde !

Exercice 7 : Galois inverse sur \mathbb{Q} , cas abélien fini

On utilisera à bon escient les résultats :

- sur la structure des groupes abéliens finis ;
- sur la progression arithmétique faible de Dirichlet (exercice 6).

En pensant aux corps cyclotomiques, montrer que tout groupe abélien fini est groupe de Galois d'une extension galoisienne sur \mathbb{Q} .

Indications : Soient G un groupe abélien fini et $n_1 \mid n_2 \mid \dots \mid n_r$ ses facteurs invariants, de sorte que l'on a $G \cong \prod_i \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$. Par Dirichlet faible, il existe des premiers p_i deux à deux distincts et respectivement congrus à 1 modulo n_i . Posons $m = \prod_i p_i$ et considérons ξ une racine primitive m -ème de l'unité dans \mathbb{C} . L'extension $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\xi)$ est galoisienne de groupe de Galois isomorphe à

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \cong \prod_i (\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})^\times \cong \prod_i \mathbb{Z}/(p_i - 1)\mathbb{Z}.$$

On en considère alors le sous-groupe $H = \prod_i n_i\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ et par suite le corps fixe $K = \mathbb{Q}(\xi)^H$. Parce que $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ est abélien, tout sous-groupe est normal, et l'extension $\mathbb{Q} \subseteq K$ est donc galoisienne de groupe de Galois isomorphe à $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times/H \cong G$.

Exercice 8 : Examen 2014

Pour quelles valeurs de $n \geq 1$ le corps $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ (resp. $\mathbb{Q}(\zeta_n) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$) s'écrit-il sous la forme $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_r})$ où $a_j \in \mathbb{Q}^\times$? Expliciter les a_j dans chaque cas.

Exercice 9 : Cyclotomie sur \mathbb{F}_q

Soient p un nombre premier, q une puissance de p et $r \geq 1$ un entier.

- Déterminer le groupe $\mu_{p^r}(\mathbb{F}_q)$ des racines p^r -èmes de l'unité dans \mathbb{F}_q .

Indications : Comme p^r et $q - 1$ sont premiers entre eux, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ vérifiant $p^r a + (q - 1)b = 1$. Si x est un élément de $\mu_{p^r}(\mathbb{F}_q)$, en particulier x est non nul et on a $x = (x^{p^r})^a (x^{q-1})^b = 1$. D'où l'égalité $\mu_{p^r}(\mathbb{F}_q) = \{1\}$.

- Montrer que toute extension finie de \mathbb{F}_q est cyclotomique, c'est-à-dire engendrée par des racines de l'unité.

Indications : Une extension de degré r de \mathbb{F}_q est le corps de décomposition de $X^{q^r-1} - 1$.

Soient $n \geq 1$ un entier et $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ le n -ème polynôme cyclotomique sur \mathbb{C} . On note $\overline{\Phi}_n^{(p)}$ la réduction de Φ_n modulo p , que l'on peut voir comme un polynôme sur \mathbb{F}_q .

Supposons n premier à p .

- Montrer que les racines de $\overline{\Phi}_n^{(p)}$ sont exactement les racines primitives n -èmes de l'unité dans \mathbb{F}_q .

Indications : On a $\overline{X^n - 1}^{(p)} = \prod_{d \mid n} \overline{\Phi}_d^{(p)}$ et l'affirmation est alors immédiate par récurrence.

- Montrer que $\overline{\Phi}_n^{(p)}$ est irréductible sur \mathbb{F}_q si et seulement si q est un générateur de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Indications : Supposons $\overline{\Phi}_n^{(p)}$ irréductible sur \mathbb{F}_q et soit $\xi \in \overline{\mathbb{F}_p}$ une racine de $\overline{\Phi}_n^{(p)}$. Alors ξ est de degré $\varphi(n)$ et on a $\xi^{q^{\varphi(n)}} = \xi$ mais $\xi^{q^f} \neq \xi$ si $1 \leq f < \varphi(n)$. Comme ξ est une racine primitive n -ème de l'unité, cela signifie $n \mid q^{\varphi(n)} - 1$ mais $n \nmid q^f - 1$. En particulier, q est d'ordre $\varphi(n)$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et donc $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique engendré par q . Pour la réciproque, il refaire le même raisonnement dans l'autre sens.

5. En déduire que la réduction de Φ_8 modulo p est réductible pour tout nombre premier p .

Indications : Le groupe $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ n'est pas cyclique. Donc Φ_8 modulo p est irréductible pour $p > 2$. De plus, $\Phi_8 \equiv (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1) \pmod{2}$.

Exercice 10 : Extensions de Kummer

Soit $P = X^n - a \in \mathbb{Q}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Q}^\times$.

1. Vérifier que P est résoluble par radicaux sur \mathbb{Q} .
2. On suppose que n est égal à un premier p et que $a \notin (\mathbb{Q}^\times)^p$. Soit L un corps de décomposition de P sur \mathbb{Q} . Montrer que $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong GA_1(\mathbb{F}_p)$.
3. On suppose que $n = 4$ et $|a| \notin (\mathbb{Q}^\times)^2$. Soit L un corps de décomposition de P sur \mathbb{Q} . Montrer que $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong GA_1(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

Exercice 11 : Irréductibilité de polynômes

Soient K un corps, $a \in K$, $r \geq 1$ et p un nombre premier. Soit $P = X^{p^r} - a \in K[X]$.

1. On suppose que $p \neq 2$ ou $\text{Car}(K) = p$ ou $r = 1$. Montrer que P est irréductible si, et seulement si, $a \notin K^p$.

Indications : Si $a \in K^p$, alors P n'est pas irréductible puisque

$$P = (X^{p^{r-1}} - b^{p^{r-1}})(X^{(p-1)p^{r-1}} + X^{(p-2)p^{r-1}}b^{p^{r-1}} + X^{(p-3)p^{r-1}}b^{2p^{r-1}} + \dots),$$

où $b \in K$ est tel que $b^p = a$.
 Réciproquement :

- Supposons $a \notin K^p$ et $p \neq 2$ et $\text{Car}(K) \neq p$. La théorie de Kummer impose que $[K(\sqrt[p]{a}, \zeta_{p^r}) : K(\zeta_{p^r})]$ est l'ordre de la classe de a dans $K(\zeta_p)^\times / (K(\zeta_p)^\times)^{p^r}$. Comme $a \notin K^p$, cet ordre est égal à p^r , et donc P est irréductible sur $K(\zeta_{p^r})$. A fortiori, P est irréductible sur K .
- Supposons $a \notin K^p$ et $\text{Car}(K) = p$. Dans ce cas, P est irréductible d'après la proposition 6.3 du polycopié.
- Le cas restant ($p = 2$ et $r = 1$) est évident.

2. On suppose que $p = 2$, $\text{Car}(K) \neq 2$ et $r \neq 1$. Montrer que P est irréductible si, et seulement si, $a \notin K^2$ et $-4a \notin K^4$.

Indications : Si $a \in K^2$, on écrit $a = b^2$ et $P = (X^{2^{r-1}} + b)(X^{2^{r-1}} - b)$ n'est pas irréductible.

Si $-4a \in K^4$, on écrit $-4a = b^4$ et $P = (X^{2^{r-1}} + X^{2^{r-2}}b + \frac{b^2}{2})(X^{2^{r-1}} - X^{2^{r-2}}b + \frac{b^2}{2})$ est réductible.

Pour la réciproque, on aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 1 : Soient L un corps et $a \in L$ tels que $a \notin K^2$ et $-4a \notin K^4$. Alors $P = X^4 - a \in L[X]$ est irréductible.

Preuve : Comme $a \notin L^2$, P n'admet pas de racines. De plus, si $b, c, d \in L$ sont tels que $P = (X^2 + bX + c)(X^2 - bX + d)$, on a les relations $c + d = b^2$, $b(c - d) = 0$ et $cd = -a$. On obtient alors que $b = 0$ ou $c = d$. Si $b = 0$, alors $c = -d$ et $c^2 = a$: absurde ! Si $c = d$, alors $b^2 = 2c$ et $c^2 = -a$, et donc $b^4 = -4a$: absurde ! On en déduit que P est bien irréductible. \square

Lemme 2 : Soient L un corps et $a \in L$ tel que $P = X^4 - a \in L[X]$ est irréductible. Alors $X^8 - a \in L[X]$ est irréductible.

Preuve : Comme $X^4 - a$ est irréductible, on a $a \notin L^2$ et $-4a \notin L^4$. Si on avait $\sqrt{a} \in L(\sqrt{a})^2$, il existerait $x, y \in L$ tels que $\sqrt{a} = (x + y\sqrt{a})^2$, et on aurait $x^2 + ay^2 = 0$ et $2xy = 1$: on obtiendrait alors $-4a = (2x)^4$, ce qui est absurde. Si on avait $-4\sqrt{a} \in L(\sqrt{a})^4$, on aurait $N_{L(\sqrt{a})/L}(-4\sqrt{a}) = -16a \in L^4$, donc $-a \in L^4$ et $L(\sqrt{a}) = L(i)$: on en déduit que $a = 4 \cdot \frac{-1}{4} \cdot (-a) = 4(1+i)^{-4} \cdot (-a) \in L^2$, ce qui est absurde. On en déduit que $\sqrt{a} \notin L(\sqrt{a})^2$ et $-4\sqrt{a} \notin L(\sqrt{a})^4$. En utilisant le lemme 1, cela montre que $X^4 - \sqrt{a} \in L(\sqrt{a})[X]$ est irréductible, et donc que $[L(\sqrt[4]{a}) : L(\sqrt{a})] = 4$. Par conséquent, $[L(\sqrt[4]{a}) : L] = 8$ et $X^8 - a \in L[X]$ est irréductible. \square

On revient maintenant à l'exercice. Supposons $a \notin K^2$ et $-4a \notin K^4$. On procède par récurrence sur r .

- Le cas $r = 2$ a été prouvé dans le lemme 1.
- Soit $r \geq 2$ tel que $X^{2^r} - a$ est irréductible sur K . Alors $[K(a^{\frac{1}{2^r}}) : K] = 2^r$ et $[K(a^{\frac{1}{2^r}}) : K(a^{\frac{1}{2^{r-2}}})] = 4$. On en déduit que $X^4 - a^{\frac{1}{2^{r-2}}} \in K(a^{\frac{1}{2^{r-2}}})[X]$ est irréductible. Par conséquent, en utilisant le lemme 2, $X^8 - a^{\frac{1}{2^{r-2}}} \in K(a^{\frac{1}{2^{r-2}}})[X]$ est irréductible. Cela prouve que $[K(a^{\frac{1}{2^{r+1}}}) : K(a^{\frac{1}{2^{r-2}}})] = 8$ et donc que $[K(a^{\frac{1}{2^{r+1}}}) : K] = 2^{r+1}$. On conclut que $X^{2^{r+1}} - a \in K[X]$ est irréductible.

Exercice 12 (à préparer) : Extensions abéliennes

Soient K un corps de caractéristique nulle et n un entier naturel. On suppose que, pour toute extension finie L de K , l'indice $[L^\times : (L^\times)^n]$ est fini. Montrer que le corps K possède un nombre fini d'extensions abéliennes de degré n .

Exercice 13 : Extensions cycliques

Soient K un corps et \bar{K} une clôture algébrique de K .

1. Soit $\sigma \in \text{Aut}(\bar{K}/K)$. Montrer que toute extension finie de $\bar{K}^{(\sigma)}$ dans

\overline{K} est cyclique.

Indications : Soit M une extension finie de $L = \overline{K}^{(\sigma)}$ contenue dans \overline{K} . Notons $G = \text{Aut}(M/L)$. Soit $\tau = \sigma|_M \in G$. On remarque que $L = M^{(\tau)}$. Donc d'après le lemme d'Artin, M/L est galoisienne de groupe de Galois $G = \langle \tau \rangle$. C'est donc une extension cyclique.

2. Montrer que si toute extension finie de K dans \overline{K} est cyclique, alors il existe $\sigma \in \text{Aut}(\overline{K}/K)$ tel que $K = \overline{K}^{(\sigma)}$.

Indications : On commence par un lemme : **Lemme :** Soit $n \geq 1$. Le corps K possède au plus une extension de degré n contenue dans \overline{K} .

Preuve : Soient M_1 et M_2 deux telles extensions. Soit N une extension finie de K contenant M_1 et M_2 et contenue dans \overline{K} . Comme N/K est cyclique, il existe au plus une extension de degré n de K contenue dans N . Donc $M_1 = M_2$. \square

Pour chaque nombre premier p , on note a_p la borne supérieure de l'ensemble des entiers naturels a tels qu'il existe une extension finie L de K de degré p^a . Pour chaque premier p , pour chaque $b \leq a_p$, on se donne $x_{p,b}$ tel que $K(x_{p,b})/K$ est de degré p^b . Soit $x \in \overline{K}$. Soit $n = [K(x) : K]$. On écrit $n = p_1^{c_1} \dots p_s^{c_s}$. On remarque $K(x)/K$ possède une extension intermédiaire de degré $p_i^{c_i}$ pour $1 \leq i \leq s$. On en déduit que $K(x) = K(x_{p_1, c_1}, \dots, x_{p_s, c_s})$. Par conséquent, $\overline{K} = K((x_{p,b})_{p,b})$. En renumérotant, il existe $x_1, x_2, \dots \in \overline{K}$ tels que $\overline{K} = K((x_i)_{i \geq 1})$. On note $K_n = K(x_1, \dots, x_n)$ pour chaque $n \geq 0$. Par récurrence, on construit une suite (σ_n) où, pour chaque n , σ_n est un générateur de $\text{Gal}(K_n/K)$ et $\sigma_{n+1}|_{K_n} = \sigma_n$. Soit alors σ l'unique élément de $\text{Aut}(\overline{K}/K)$ qui prolonge tous les σ_n . Comme pour chaque n on a $K = K_n^{(\sigma_n)}$, on a aussi $K = \overline{K}^{(\sigma)}$.

Exercice 14 : Sous-corps d'un corps algébriquement clos

Soit Ω un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit K un sous-corps de Ω tel que l'extension Ω/K est de degré fini. Le but de cet exercice est de montrer que $\Omega = K(\sqrt{-1})$.

1. Expliquer pourquoi Ω/K est galoisienne.

Soit i une racine de $X^2 + 1$ dans Ω . On pose $G = \text{Gal}(\Omega/K(i))$. On suppose que G n'est pas trivial et on se donne p un nombre premier divisant l'ordre de G .

2. Montrer qu'il existe un sous-corps L de Ω contenant $K(i)$ tel que Ω/L est une extension galoisienne de degré p .
3. Montrer qu'il existe $a \in L$ tel que le polynôme $P = X^p - a \in L[X]$ est irréductible et Ω est un corps de rupture de P .
4. Soit $\alpha \in \Omega$ une racine de P . Calculer $N_{\Omega/L}(\alpha)$.
5. Conclure.
6. Montrer qu'un élément non trivial de $\text{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ d'ordre fini est forcément d'ordre 2.

Exercice 15 : Partiel 2013

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de \mathbb{Q} et soit $a \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Montrer qu'il existe un sous-corps K de $\overline{\mathbb{Q}}$ tel que $a \notin K$ et que tout sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ contenant strictement K contient a ; on dit que K est un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ maximal sans a .

On choisit un nombre premier p divisant $[K(a) : K]$. Soit L une extension finie non triviale de K contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}$. On note M la clôture normale de L dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et $G := \text{Gal}(M/K)$.

2. Montrer que p divise $[L : K]$.
3. Montrer que $[L : K]$ est une puissance de p .
4. Montrer que $[K(a) : K] = p$ et que $K(a)$ est la seule sous-extension de $\overline{\mathbb{Q}}/K$ de degré p sur K .
5. Montrer que G est cyclique, puis que toute extension finie de K est galoisienne cyclique.
6. Montrer qu'il existe $b \in K(a)$, avec $b^p \in K$, tel que $K(a) = K(b)$.

Indications : Voir le corrigé du partiel 2013.

Exercice 16 : Extensions d'Artin-Schreier

Soient K un corps de caractéristique $p > 0$ et L/K une extension galoisienne de degré p . Soit σ un générateur de $\text{Gal}(L/K)$.

1. Montrer qu'il existe $x \in L$ vérifiant $\sigma(x) - x = 1$.

Indications : On a $\text{Ker}(\sigma - \text{Id}) = K$ et en tant qu'application K -linéaire $\sigma - \text{Id}$ est donc de rang $p - 1$. De plus, parce que σ est d'ordre p dans $\text{Gal}(L/K)$, on a $(\text{Id} + \sigma + \dots + \sigma^{p-1}) \circ (\sigma - \text{Id}) = 0$; d'où l'inclusion $\text{Im}(\sigma - \text{Id}) \subseteq \text{Ker}(\text{Id} + \sigma + \dots + \sigma^{p-1})$. Par indépendance linéaire des caractères, $\text{Id} + \sigma + \dots + \sigma^{p-1}$ n'est pas identiquement nulle sur L et on a donc $\text{Im}(\sigma - \text{Id}) = \text{Ker}(\text{Id} + \sigma + \dots + \sigma^{p-1}) \supseteq K$.

2. Montrer qu'il existe $a \in K^\times$ tel que L soit le corps de décomposition de $X^p - X - a$.

Indications : Soit $x \in L$ vérifiant $\sigma(x) - x = 1$. Le polynôme minimal de x sur K est alors :

$$\prod_{i=0}^{p-1} (X - \sigma^i(x)) = \prod_{i=0}^{p-1} (X - x - i) = (X - x)^p - (X - x) = X^p - X - (x^p - x).$$

En posant $a = x^p - x$, on obtient que L est le corps de décomposition de $X^p - X - a$.

Exercice 17 : Partiel 2011

Considérons le polynôme $P = X^4 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer que P a exactement deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 .
2. On écrit $(X - x_1)(X - x_2) = X^2 + aX + b$. Calculer $[\mathbb{Q}(a^2) : \mathbb{Q}]$.
3. En déduire qu'aucune des racines de P n'est constructible à la règle et au compas.

Indications : Voir le corrigé du partiel 2011.

Exercice 18 : Constructibilité et angles

Soit n un entier naturel. Montrer que l'angle de n° est constructible si, et seulement si, 3 divise n .

Exercice 19 : Examen 2012

Le polynôme $X^5 - 5X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ est-il résoluble par radicaux ?

Exercice 20 : Une extension non résoluble

Soit $f \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 7 irréductible. On suppose que f contient exactement 3 racines réelles. Montrer que f n'est pas résoluble par radicaux.

Exercice 21 : Résolubilité par radicaux réels

Soient K un sous-corps de \mathbb{R} , $p > 2$ un nombre premier et $a \in K$ qui n'est pas une puissance p -ème dans K . Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $x^p = a$.

1. Montrer que $K \subseteq K(x)$ n'est pas galoisienne.

Indications : Si $K \subseteq K(x)$ était galoisienne, elle contiendrait les conjugués de x , c'est-à-dire les $\xi^k x$ avec ξ une racine primitive p -ème de 1 et $0 \leq k \leq p-1$. Or, parce que p est impair, on a $\xi^k \notin \mathbb{R} \supseteq K(x)$ pour tout $1 \leq k \leq p-1$.

Une extension $K \subseteq L$ est dite *radicale réelle* s'il existe une tour d'extensions

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n \subseteq \mathbb{R}$$

telle que $L \subseteq K_n$ et, pour tout i , $K_{i+1} = K_i(x_i)$ avec $x_i^{n_i} \in K_i$ pour un certain entier $n_i \geq 1$. Un polynôme est dit *résoluble par radicaux réels* si son corps de décomposition l'est.

Soit $K \subseteq L$ une extension galoisienne radicale réelle.

2. En se ramenant à une tour avec degrés successifs premiers, montrer que $[L : K]$ est une puissance de 2.

Indications : Par définition, il existe une tour d'extensions radicales réelles élémentaires

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n \subseteq \mathbb{R} \tag{1}$$

avec $L \subseteq K_n$. Si $K_{i+1} = K_i(x_i)$ avec $x_i^{n_i} \in K_i$ avec $n_i = \prod_{j=1}^s p_j^{(i)}$ avec les $p_j^{(i)}$ premiers (éventuellement avec répétition), on peut insérer des intermédiaires du type

$$K_i \subseteq K_i\left(x_i^{\prod_{j=1}^{s-1} p_j^{(i)}}\right) \subseteq K_i\left(x_i^{\prod_{j=1}^{s-2} p_j^{(i)}}\right) \subseteq \dots \subseteq K_i\left(x_i^{p_1^{(i)}}\right) \subseteq K_{i+1} = K_i(x_i)$$

à chaque cran dans la suite (1). De cette manière, on peut supposer que dans (1), on a $[K_{i+1} : K_i]$ premier ; et puisque K_n est inclus dans \mathbb{R} , ceux que l'on a insérés en plus le sont aussi. On montre ensuite par récurrence sur la longueur n d'une telle suite que $K_1 \subseteq K_n$ est de degré 2^n . Pour $n = 1$, le 1. donne que le degré est 2 et c'est fini. Ensuite, on applique l'hypothèse de récurrence à $K_1 \subseteq K_n$ avec $K_1 \subseteq L$ galoisienne et qui s'insère dans une suite de type (1) de longueur $n - 1$: $K_1 \subseteq K_n$ de degré 2^{n-1} . De plus, $K_0 \subseteq K_1$ est de degré p . Par lemme de Cauchy ou théorème de Sylow, $\text{Gal}(K_n^{\text{norm}}/K)$ possède un sous-groupe H d'ordre p . On note $M = K_n^H$ qui est alors d'indice p dans K_n et $M \subseteq K_n$ est galoisienne par lemme d'Artin. On a alors $p = 2$ par 1. et la récurrence est prouvée. Au final, $[L : K] \mid [K_n : K_0]$ est aussi une puissance de 2.

3. Donner un exemple de telle extension.

Indications : On peut prendre $\mathbb{Q}(\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2}})/\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}(\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \sqrt{2 + \sqrt{3}})/\mathbb{Q}$.

4. Montrer que l'extension $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{7}))$ est radicale mais pas radicale réelle.

Indications : Comme $2 \cos(\frac{2\pi}{7})$ est zéro de $P := X^3 + X^2 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$, qui est irréductible, $\cos(\frac{2\pi}{7})$ est de degré 3 sur \mathbb{Q} . De plus, les autres racines de P étant $2 \cos(\frac{4\pi}{7})$ et $2 \cos(\frac{6\pi}{7})$, et comme on a $\cos(\frac{4\pi}{7}) = 2 \cos(\frac{2\pi}{7})^2 - 1$, l'extension $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{7}))$ est galoisienne, de groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Elle est donc radicale (car le groupe de Galois est résoluble) mais pas radicale réelle par 2.

Soit $P \in K[X]$ un polynôme irréductible de degré 3.

5. Montrer que si P a trois racines réelles x, y, z , alors aucune des extensions $K(x)/K, K(y)/K$ et $K(z)/K$ n'est radicale réelle (résultat dû à Hölder).

Indications : Supposons $K \subseteq K(x)$ radicale réelle. De plus $K(x) \subseteq K(x, y)$ est radicale quadratique ; et parce que $K(x, y)$ est un sous-corps de \mathbb{R} , $K \subseteq K(x, y)$ est radicale réelle. Or cette dernière est galoisienne, de degré 3 ou 6, ce qui contredit 2.

On rappelle les formules de Tartaglia-Cardan : les zéros du polynôme $X^3 +$

$bX + c$ sont les

$$\xi \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \xi^2 \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$$

pour ξ parcourant les racines 3-èmes de l'unité.

6. Montrer que si P n'a qu'une racine réelle x , alors $K(x)/K$ est radicale réelle.

Indications : Quitte à utiliser le changement de variables usuel (qui ne modifie pas le nombre de racines réelles), on va supposer $P = X^3 + bX + c \in K[X]$ irréductible. Posons $\delta = \frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}$.

Si δ est strictement négatif, $\sqrt{\delta}$ est imaginaire pur et $-\frac{c}{2} \pm \sqrt{\delta}$ sont deux complexes conjugués. Il s'ensuit que leurs racines troisièmes sont aussi des complexes conjugués : on peut en choisir deux privilégiées compatibles, que l'on va noter $\sqrt[3]{-\frac{c}{2} \pm \sqrt{\delta}}$ et en appliquant la conjugaison complexe dans les formules de Cardan, on voit que les trois racines sont réelles. Si δ est nul, on a une racine double qui ne peut donc pas être complexe et donc trois racines réelles aussi.

Au final on a dans notre cas $\delta > 0$. Alors $-\frac{c}{2} \pm \sqrt{\delta}$ sont réels et possèdent une racine troisième réelle que l'on va noter $\sqrt[3]{-\frac{c}{2} \pm \sqrt{\delta}}$. On a alors $x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\delta}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\delta}}$, et il suffit de considérer la tour

$$K \subseteq K(\sqrt{\delta}) \subseteq K\left(\sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\delta}}\right) \subseteq K\left(\sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\delta}}, \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\delta}}\right) \subseteq \mathbb{R}$$

pour voir que $K \subseteq K(x)$ est radicale réelle.

Exercice 22 : Descente pour les espaces vectoriels

Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $F \subseteq E$ une extension galoisienne (ie. normale et séparable) finie, de base $\{1, x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Notons $G = \text{Gal}(E/F)$.

1. Rappeler pourquoi les éléments de G sont linéairement indépendants sur E .

Indications : Soit $\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_k g_k = 0$ une relation de dépendance linéaire de longueur minimale sur E . On peut supposer cette relation de longueur ≥ 2 . Parce que les caractères sont distincts, on a l'existence d'un élément $y \in E$ avec $g_1(y) \neq g_2(y)$. On a d'une part $g_1(y) \sum_i \lambda_i g_i(x) = 0$, et d'autre part $\sum_i \lambda_i g_i(xy) = \sum_i \lambda_i g_i(x) g_i(y) = 0$. En soustrayant, on obtient une combinaison linéaire non triviale et strictement plus courte, ce qui est absurde.

Soit V un espace vectoriel sur E , muni d'une action semi-linéaire de G , c'est-à-dire d'une action telle que, pour $g \in G, \lambda \in E, v \in V$, on a $g \cdot (\lambda v) = g(\lambda)v$. On définit son sous- F -espace vectoriel des G -invariants $V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G, gv = v\}$.

2. Vérifier que l'application E -linéaire $V^G \otimes_F E \xrightarrow{\eta} V$ canonique est compatible à l'action de G .

Indications : Pour tout $g \in G$, on a

$$\eta \circ g(v \otimes e) = \eta(v \otimes g(e)) = \eta(g(v) \otimes g(e)) = g(e)g(v) = g(ev).$$

3. Montrer que η est un isomorphisme.

Indications : Montrons d'abord que η est surjective. Notons $g_1 = Id, \dots, g_n$ les éléments de G . On renomme aussi $x_0 := 1 \in E$. Soit v un élément non nul de V . Posons, pour tout $j \in [0, n-1]$, $v_j = \sum_i g_i(x_j v) \in V^G$. Par la question 1., la matrice $(g_i(x_j))_{ij}$ est inversible, et en inversant le système précédent, on obtient les $g_i(v)$ en combinaison linéaire des v_j . La relation donnant $g_1(v)$ affirme alors la surjectivité voulue.

Montrons ensuite que η est injective. En effet, si ce n'est pas le cas, soit (v_1, \dots, v_m) une famille de V^G qui est F -libre mais non E -libre; on la suppose aussi de longueur minimale. Soit $\sum_i \lambda_i v_i$ une combinaison linéaire non triviale sur E . Comme les λ_i ne sont pas tous dans F , on peut supposer $\lambda_1 \notin F$ et $\lambda_m = 1$. Choisissons $g \in G$ avec $g(\lambda_1) \neq \lambda_1$. On obtient alors une relation $\sum_{i=1}^{m-1} (g(\lambda_i) - \lambda_i)v_i = 0$, qui contredit la minimalité de m .

Exercice 23 : Hilbert 90 et applications

Soient K un corps et L/K une extension galoisienne finie. Soit $G = \text{Gal}(L/K)$.

On rappelle que les éléments de G sont linéairement indépendants.

1. On suppose que l'extension L/K est cyclique de degré n . Soient σ un générateur de G et $x \in L$.

- (a) Montrer que x est de norme 1 si et seulement si il existe $y \in L^\times$ tel que l'on ait $x = \frac{\sigma(y)}{y}$.

Indications : Pour le sens \Leftarrow il suffit de constater que :

$$N_{L/K}(x) = \prod_{i=0}^{n-1} \sigma^i \left(\frac{\sigma(y)}{y} \right) = 1.$$

Réciproquement, supposons que l'on a $N_{L/K}(x) = 1$; en particulier, on a $x \in L^\times$. Comme les éléments de G sont linéairement indépendants, l'application

$$\text{Id} + x^{-1}\sigma + (x^{-1}\sigma(x^{-1}))\sigma^2 + \dots + (x^{-1}\sigma(x^{-1}) \dots \sigma^{n-1}(x^{-1}))\sigma^{n-1}$$

n'est pas identiquement nulle : on prend $z \in L$ qui ne l'annule pas et on note y sa valeur en z . On a alors $\sigma(y) = xy$.

- (b) En utilisant la question précédente appliquée à une extension L/K bien choisie, exhiber deux fractions rationnelles $F, G \in \mathbb{Q}(X, Y)$ telles que l'application $\mathbb{Q}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (F(x, y), G(x, y))$ est bien définie et son image est exactement constituée des points à coordonnées rationnelles du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

Indications : Un point à coordonnées rationnelles du cercle est un élément de norme 1 dans $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ et s'écrit donc $\frac{x-iy}{x+iy} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - i\frac{2xy}{x^2+y^2}$. On pose donc $F = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ et $G = \frac{-2xy}{x^2+y^2}$.

2. On ne suppose plus L/K cyclique.

(a) Soit $f : G \rightarrow L^\times$ une fonction telle que, pour tous $s, t \in G$, on a $f(st) = s(f(t))f(s)$. Montrer qu'il existe $x \in L^\times$ tel que, pour tout $s \in G$, on a $f(s) = s(x)x^{-1}$.

Indications : Comme les éléments de G sont linéairement indépendants, il existe $c \in L$ tel que $b = \sum_{t \in G} f(t)t(c) \neq 0$. On calcule alors, pour chaque $s \in G$:

$$s(b) = \sum_{t \in G} s(f(t))st(c) = f(s)^{-1} \sum_{t \in G} f(st)st(c) = f(s)^{-1}b.$$

Donc $f(s) = s(b^{-1})(b^{-1})^{-1}$.

(b) Étant donné un corps E et un entier naturel n , on note $\mathbb{P}^n(E)$ l'espace projectif de dimension n , c'est-à-dire l'ensemble des droites de E^{n+1} . Montrer que l'action naturelle de G sur L^{n+1} induit une action de G sur $\mathbb{P}^n(L)$. Montrer que $\mathbb{P}^n(L)^{\text{Gal}(L/K)} = \mathbb{P}^n(K)$.

Indications : Le seul point difficile est l'inclusion $\mathbb{P}^n(L)^{\text{Gal}(L/K)} \subseteq \mathbb{P}^n(K)$. Soit $(x_0, \dots, x_n) \in L^{n+1} \setminus \{0\}$ tel que la droite qu'il engendre est fixée par G . Cela signifie qu'il existe $f : G \rightarrow L^\times$ telle que $s \cdot (x_0, \dots, x_{n+1}) = f(s)(x_0, \dots, x_{n+1})$ pour chaque $s \in G$. On en déduit que, pour chaque $s, t \in G$:

$$\begin{aligned} f(st)(x_0, \dots, x_n) &= (st) \cdot (x_0, \dots, x_n) = s \cdot (t \cdot (x_0, \dots, x_n)) \\ &= s \cdot (f(t)(x_0, \dots, x_n)) = s(f(t))f(s)(x_0, \dots, x_n), \end{aligned}$$

ce qui montre que $f(st) = s(f(t))f(s)$. D'après (a), il existe $x \in L^\times$ tel que $f(s) = s(x)x^{-1}$ pour chaque s . On remarque alors que $(x_0x^{-1}, \dots, x_nx^{-1}) \in (L^{n+1})^G = K^{n+1}$. Donc la droite engendrée par (x_0, \dots, x_n) est contenue dans $\mathbb{P}^n(K)$.

Exercice 24 : Extensions cycliques et normes

Soit $n \geq 2$. Soit K un corps tel que $|\mu_n(K)| = n$ et $\text{Car}(K) \nmid n$. Soit $a \in K^\times$ pour lequel le corps $L = K(\sqrt[n]{a})$ vérifie $[L : K] = n$. Le but de cet exercice est de montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe une extension finie galoisienne M/K contenant L telle que $\text{Gal}(M/K) \cong \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$;
- (ii) $\mu_n \subseteq N_{L/K}(L^\times)$.

1. On suppose (i) et on note σ un générateur de $\text{Gal}(M/K)$.

(a) Montrer qu'il existe $b \in L$ tel que $M = L(\sqrt[n]{b})$.

Indications : Le groupe $\text{Gal}(M/L)$ est un sous-groupe de $\text{Gal}(M/K) \cong \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ d'ordre n . Il est donc engendré par σ^n et isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Comme $|\mu_n(K)| = n$, la théorie de Kummer montre qu'il existe $b \in L$ tel que $M = L(\sqrt[n]{b})$.

- (b) Soit $c = \frac{\sigma(\sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{b}}$. Montrer que $c \in L$.

Indications : Il existe $\zeta \in \mu_n(K)$ tel que $\sigma^n(\sqrt[n]{b}) = \zeta \sqrt[n]{b}$. On calcule alors :

$$\sigma^n(c) = \frac{\sigma^{n+1}(\sqrt[n]{b})}{\sigma^n(\sqrt[n]{b})} = \frac{\sigma(\zeta \sqrt[n]{b})}{\zeta \sqrt[n]{b}} = c.$$

Donc $c \in M^{\text{Gal}(M/L)} = L$.

- (c) Montrer que $N_{L/K}(c)$ est un générateur de μ_n . En déduire (ii).

Indications : On a :

$$N_{L/K}(c) = c\sigma(c)\sigma^2(c)\dots\sigma^{n-1}(c) = \frac{\sigma^n(\sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{b}} \in \mu_n(L).$$

Notons $\zeta = N_{L/K}(c)$. Pour chaque $s \geq 0$, on a alors $\sigma^{ns}(\sqrt[n]{b}) = \zeta^s \sqrt[n]{b}$. Pour $1 \leq s \leq n-1$, comme M est engendré par $\sqrt[n]{b}$, on a $\sigma^{ns}(\sqrt[n]{b}) \neq \sqrt[n]{b}$ et donc $\zeta^s \neq 1$. On en déduit que ζ est un générateur de μ_n . La propriété (ii) en découle immédiatement.

2. On suppose (ii) et on note τ un générateur de $\text{Gal}(L/K)$. Soit $z \in L$ tel que $N_{L/K}(z)$ est un générateur de μ_n .

- (a) En utilisant la question 1.(a) de l'exercice 23, montrer qu'il existe $b \in L^\times$ tel que $z^n = \frac{\tau(b)}{b}$.

Indications : Comme $N_{L/K}(z) \in \mu_n$, on a $N_{L/K}(z^n) = 1$. La question 1.(a) de l'exercice 23 permet alors de conclure.

- (b) Soit $M = L(\sqrt[n]{b})$. Montrer que τ se prolonge en un automorphisme de corps $\sigma \in \text{Aut}(M/K)$.

Indications : Soit $i : L \hookrightarrow M$ l'injection naturelle. On remarque que i et $i \circ \tau$ sont des corps de décomposition de $X^n - b \in L[X]$. Il existe donc un automorphisme de corps $\sigma : M \rightarrow M$ tel que $\sigma \circ i = i \circ \tau$. On en déduit que σ est un élément de $\text{Aut}(M/K)$ qui prolonge τ .

- (c) En utilisant que $z^n = \frac{\tau(b)}{b}$, montrer que $\frac{\sigma^n(\sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{b}}$ est un générateur de μ_n .

Indications : On a $z^n = \frac{\tau(b)}{b} = \left(\frac{\sigma^n(\sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{b}}\right)^n$. On en déduit qu'il existe $\eta \in \mu_n$ tel que $\frac{\sigma^n(\sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{b}} = \eta z \in L$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^n(\sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{b}} &= \prod_{i=0}^{n-1} \sigma^i \left(\frac{\sigma(\sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{b}} \right) \\ &= N_{L/K}(\eta z) \\ &= N_{L/K}(z). \end{aligned}$$

- (d) En déduire que M/K est galoisienne cyclique de degré n^2 .

Indications : On note $\zeta = \frac{\sigma^n(\sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{b}}$. On remarque que $\sigma^n \in \text{Gal}(M/L)$ et que l'on a $\frac{\sigma^{ns}(\sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{b}} = \zeta^s$ pour chaque $s \geq 1$. Comme ζ est une racine primitive n -ième de l'unité, on en déduit que σ^n est un générateur de $\text{Gal}(M/L) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il suit immédiatement que M/K est galoisienne de degré n^2 .