Ecole Normale Supérieure
FIMFA – Statistique 2012-2013

Feuille d'exercices n°1.

Exercice 1. On considère une urne contenant N boules dont M sont blanches, N étant connu et M inconnu.

1. On tire avec remise des boules dans cette urne. On arrête le tirage dès que r boules blanches ont été tirées. Proposer un modèle statistique adapté sur le nombre de tirages effectués.
2. On tire sans remise n boules dans cette urne. Proposer un modèle statistique adapté sur le nombre de boules blanches tirées.

Exercice 2. Soit $(\mathcal{H}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$ un modèle statistique. On suppose qu'il est *dominé*, c'est-à-dire qu'il existe une mesure σ-finie μ sur $\mathcal{H}$ telle que pour tout $\theta \in \Theta$, la loi de $\mathbb{P}_\theta$ est absolument continue par rapport à μ (notation : $\mathbb{P}_\theta \ll \mu$). On note alors f_θ une densité de $\mathbb{P}_\theta$ par rapport à μ.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \Theta$, $f_\theta > 0$ $\mathbb{P}_\theta$-p.s. Donner un exemple de modèle où f_θ n'est pas strictement positive μ-presque partout.
2. Montrer que $f_\theta > 0$ μ-presque partout pour tout $\theta \in \Theta$ si et seulement μ est équivalente à chacune des lois $\mathbb{P}_\theta$. Exprimer dans ce cas une densité de μ par rapport à $\mathbb{P}_\theta$.
3. On dit que le modèle $(\mathcal{H}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$ est *homogène* si

$$\forall(\theta, \theta') \in \Theta^2, \quad \mathbb{P}_\theta \ll \mathbb{P}_{\theta'}.$$

   Montrer que cette propriété équivaut à l'existence d'une mesure dominante μ et, pour tout $\theta \in \Theta$, d'une densité f_θ strictement positive μ-presque partout.

Exercice 3. On considère la variable aléatoire

$$X = \varepsilon + Y(1 - \varepsilon),$$

où $\varepsilon \sim \mathcal{B}(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$, et $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sont deux v.a. indépendantes.

1. Calculer la loi de X.
2. On considère une expérience aléatoire dans laquelle on observe n réalisations indépendantes de la loi de X. Préciser le modèle statistique et donner une mesure dominante du modèle (cf. Ex.2) et la famille des densités associées.

Exercice 4. Soit $(\mathbb{R}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}})$ un modèle statistique *à paramètre de position*, i.e. pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_\theta$ est l'image de $\mathbb{P}_0$ par la translation $x \mapsto x + \theta$. On suppose de plus que $\mathbb{P}_\theta$ possède une densité f_θ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f_\theta(x) = f_0(x - \theta)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
2. On considère $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de loi $\mathbb{P}_\theta$.
   (a) Donner une densité de la loi de la variable
   $$R_n = X_{(n)} - X_{(1)},$$
   on rappelle que $X_{(1)} = \min(X_1, ..., X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1, ..., X_n)$.
   (b) Préciser explicitement cette densité lorsque la loi $\mathbb{P}_\theta$ est uniforme sur $]\theta, \theta+1[$.
   (c) Dans ce cas uniforme, déterminer le comportement presque sûr de R_n quand $n \to \infty$, puis le comportement en loi de $n(1 - R_n)$.