Ecole Normale Supérieure
FIMFA – Statistique 2012-2013

Feuille d'exercices n°5.

Exercice 1. Soit $(X,T) = (X, T_1, T_2, ..., T_n)$ un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe des réels $c_0, c_1, ..., c_n$ tels que

$$X = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i T_i + Z,$$

   où Z est une variable gaussienne centrée indépendante de T, et en déduire que

$$\mathbb{E}[X \mid T] = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i T_i \quad \text{p.s.}$$

2. Réciproquement, montrer que si T est un vecteur gaussien de dimension n et X une v.a.r. dont la loi conditionnelle sachant $T = (t_1, ..., t_n)$ est une loi gaussienne de moyenne $c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i t_i$ et de variance σ^2 (indépendante de $(t_1, ..., t_n)$), alors (X,T) est un vecteur gaussien.

Exercice 2. Soit (X,Y) un vecteur gaussien tel que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$ et $\mathrm{Cov}(X,Y) = \rho$, avec $-1 \leq \rho \leq 1$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\max\{X,Y\}\right] = \sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}.$$