École normale supérieure Année 2014-2015
Algèbre 1

Feuille d'exercices 10

Exercice 1 Soit $\mathbf{K}$ un corps, et soient A et B des $\mathbf{K}$-algèbres.

1. Définir une structure de $\mathbf{K}$-algèbre sur $A \otimes_{\mathbf{K}} B$.
2. Montrer que les $\mathbf{K}$-algèbres $\mathbf{K}[X] \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}[Y]$ et $\mathbf{K}[X, Y]$ sont isomorphes.
3. Montrer que le morphisme naturel de $\mathbf{K}$-algèbres de $\mathbf{K}(X) \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}(Y)$ vers $\mathbf{K}(X, Y)$ est injectif mais non surjectif.

Exercice 2

1. Notons $M_2(\mathbf{C})$ la $\mathbf{C}$-algèbre des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbf{C}$ et $\mathbf{H}$ la $\mathbf{R}$-algèbre des quaternions. Montrer que les $\mathbf{C}$-algèbres $M_2(\mathbf{C})$ et $\mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ sont isomorphes.
2. Montrer que $\mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{H}$ est isomorphe à $M_4(\mathbf{R})$.

Exercice 3 Soient U et V des espaces vectoriels (sur un corps $\mathbf{K}$). On note $U^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(U, \mathbf{K})$ le dual de U. Expliciter une application linéaire naturelle injective $\Phi : U^* \otimes_{\mathbf{K}} V \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(U, V)$. Quelles sont les images des tenseurs purs (c'est-à-dire les $\lambda \otimes v$ avec $\lambda \in U^*$ et $v \in V$) ? Quelle est l'image de l'application Φ ? Quand est-elle un isomorphisme ?

Exercice 4 Soit $\mathbf{K}$ un corps et soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{K}$. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que le dual $(\bigwedge^n E)^*$ de $\bigwedge^n E$ est canoniquement isomorphe à $\bigwedge^n E^*$.

Exercice 5 Soit $n \geq 1$ un entier, soit $\mathbf{K}$ un corps et soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{K}$. Montrer que le dual $(\bigwedge^i E)^*$ de $\bigwedge^i E$ est non canoniquement isomorphe à $\bigwedge^{n-i} E$.

Exercice 6 Soit $\mathbf{K}$ un corps et soient E et F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que l'on a une bijection entre l'ensemble des applications linéaires $\bigwedge^n E \to F$ et l'ensemble des applications n-linéaires alternées $E^n \to F$.

Exercice 7 Soit $\mathbf{K}$ un corps et soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soient $u_1, \ldots, u_r$ des éléments de E.

1. Montrer que l'on a $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r E$ si et seulement si la famille $(u_1, \ldots, u_r)$ est libre dans E.

2. Montrer que l'on a $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r E$ si et seulement s'il existe une forme alternée f sur E telle que $f(u_1, \ldots, u_r) \neq 0$.

Exercice 8 Soit $\mathbf{K}$ un corps et soient E et F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Soit $n \geq 1$ un entier et soit $u : E \to F$ une aplication linéaire.

1. Définir une application linéaire "naturelle" $\bigwedge^n u : \bigwedge^n E \to \bigwedge^n F$.
2. Supposons que le rang de u est fini égal à un entier r. Montrer que si $n \leq r$, alors le rang de $\bigwedge^n u$ est $\binom{n}{r}$, et si $n > r$, l'application $\bigwedge^n u$ est nulle.

Exercice 9 Soit $\mathbf{K}$ un corps et soient A et B des $\mathbf{K}$-algèbres graduées.

1. Montrer qu'il existe sur $A \otimes_{\mathbf{K}} B$ une structure naturelle de $\mathbf{K}$-algèbre graduée telle que
$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{(\deg b)(\deg a')}(aa' \otimes bb').$$
On note $A \otimes_{\mathbf{K}}^{\mathrm{su}} B$ l'algèbre ainsi obtenue.
2. Soient V et W des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$. Montrer que l'on a un isomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres
$$\bigwedge(V \oplus W) \simeq \bigwedge V \otimes_{\mathbf{K}}^{\mathrm{su}} \bigwedge W.$$

Exercice 10 Soit $\mathbf{K}$ un corps et soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

1. Supposons E de dimension finie. On note $\bigwedge E = \bigoplus_n \bigwedge^n E$ et on écrit tout élément $z \in \bigwedge E$ sous la forme $z = \sum_{n \geq 0} z_n$. Montrer que $z \in \bigwedge E$ est inversible si et seulement si $z_0 \neq 0$.
2. Montrer que tout élément $z \in \bigwedge E$ appartient à un $\bigwedge F$ pour un certain sous-espace $F \subset E$ de dimension finie. Conclure.

Exercice 11 Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $F \subset E$ des corps tels que E est un F-espace vectoriel de dimension n, de base $(1, x_1, \ldots, x_{n-1})$. On suppose l'existence d'un groupe G de cardinal n, composé de F-automorphismes de E, tel que le corps $E^G = \{e \in E \mid \forall g \in G,\ ge = e\}$ est exactement F.

1. Montrer que les éléments de G sont linéairement indépendants.
2. Soit V un E-espace vectoriel, muni d'une action semi-linéaire de G. On définit le sous-F-espace vectoriel des G invariants par $V^G := \{v \in V \mid \forall g \in G\ gv = v\}$. Prouver que l'application naturelle E-linéaire $\eta : V^G \otimes_F E \to V$ commute à l'action de G.
3. Montrer que η est un isomorphisme.

Exercice 12 Soit V un espace vectoriel hermitien complexe de dimension finie n, de base $(e_1, \ldots, e_n)$. On ne suppose pas que cette base est orthonormale. Pour $1 \leq i \leq n$, soit s_i une transformation unitaire telle que $s_i(e_i) = c_i e_i$ avec $c_i \neq 1$ et telle que s_i est l'identité sur $e_i^{\perp}$. On appelle G le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par les s_i.

1. Soit $x \in V$. Exprimer $s_i(x)$ comme combinaison linéaire de x et de e_i.
2. Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que tout élément de $\bigwedge^k V$ invariant par G est nul (on pourra procéder par récurrence sur n en considérant le sous-espace V' de base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ et en décomposant V en somme directe de V' et de son supplémentaire orthogonal).
3. On suppose que G est fini. Montrer que pour tout élément A de $\mathrm{End}(V)$ on a :

$$\sum_{g \in G} \det(A - g) = \mathrm{Card}(G) \cdot \det(A) \quad \text{et} \quad \sum_{g \in G} \det(\mathrm{Id} - Ag) = \mathrm{Card}(G).$$

4. En déduire que pour tout A de $\mathrm{End}(V)$, il existe $g \in G$ tel que Ag n'a aucun point fixe non nul.