École normale supérieure Année 2014-2015

Algèbre 1

Feuille d'exercices 11

Exercice 1 Soit $G = \mathfrak{S}_3$ et soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel possédant une base indexée par les éléments de G. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} T : G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ g & \to & T(g) \end{array}$$

définie par $T(g)e_\tau = e_{g\tau g^{-1}}$.

1. Montrer que T est une représentation de G.
2. Soit j une racine 3-ième primitive de 1. Soit W le sous-espace de V dont une base est
$$\alpha = e_{(1,2)} + je_{(1,3)} + j^2 e_{(2,3)}, \qquad \beta = e_{(1,2)} + j^2 e_{(1,3)} + je_{(2,3)}.$$
Montrer que W est un sous-G-module de V. Est-ce que W est irréductible ?
3. Déterminer la décomposition de V en somme directe de sous-espaces irréductibles et expliciter l'action de G sur chacun de ces sous-espaces.

Exercice 2 Soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel, soit G un groupe et soit (V, ρ) une représentation de G. On suppose qu'il existe $v \in V$ tel que $\{\rho(g)v \mid g \in G\}$ forme une base de V. Montrer que (V, ρ) est isomorphe à la représentation régulière de G.

Exercice 3 Soit G un groupe fini, soit H un sous-groupe distingué dans G, soit $\pi : G \to G/H$ la projection canonique et soit ρ une représentation complexe de G/H.

1. Montrer que $\rho \circ \pi$ est une représentation de G.
2. Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\rho \circ \pi$ est irréductible.

Exercice 4 Soit p un nombre premier et soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Soit G un p-groupe. Montrer que G possède une représentation non triviale de dimension 1 sur $\mathbf{K}$.

Exercice 5 Soit G un groupe fini et soit χ un caractère de G vérifiant

$$\forall g \in G \qquad g \neq 1 \Rightarrow \chi(g) = 0.$$

Montrer que χ est un multiple entier du caractère de la représentation régulière de G.

Exercice 6 1. Soit A un groupe fini abélien et χ un caractère de A sur $\mathbf{C}$. Montrer

$$\sum_{a\in A} |\chi(a)|^2 \geq \mathrm{Card}(A)\chi(1_A).$$

2. Soit G un groupe fini et soit A un sous-groupe abélien de G d'indice $n \geq 1$. Montrer que si χ est un caractère irréductible de G, on a $\chi(1_A) \leq n$. Que peut-on dire si $\chi(1_A) = 1$?

Exercice 7 Soit G un groupe fini et soient ϕ et ψ des caractères de G dans $\mathbf{C}$.

1. Montrer que si ψ est de degré 1, $\phi\psi$ est irréductible si et seulement si ϕ est irréductible.
2. Montrer que si ψ est de degré strictement supérieur à 1, le caractère $\psi\bar{\psi}$ n'est pas irréductible.
3. Soit ϕ un caractère irréductible de G. On suppose que ϕ est le seul caractère irréductible de son degré. Montrer que s'il existe un caractère ψ de degré 1 et $g \in G$ tel que $\psi(g) \neq 1$, alors $\phi(g) = 0$.

Exercice 8 1. Dresser la table des caractères de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, pour tout entier $n \geq 1$.

2. Dresser la table des caractères de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 9 Soit p un nombre premier et soit $f \geq 1$ un entier ; on pose $q = p^f$. Soit G le groupe $\{x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbf{F}_q^\times,\ b \in \mathbf{F}_q\}$.

1. Déterminer la table des caractères de G sur $\mathbf{C}$.
2. Déterminer les représentations irréductibles de G sur $\mathbf{C}$.

Exercice 10 Soit G un groupe fini et soit X un ensemble fini sur lequel G agit transitivement. Soit ρ la représentation de permutation sur $\mathbf{C}$ obtenue et soit χ son caractère.

1. Montrer la décomposition $\rho = 1 \oplus \theta$, où θ ne contient pas la représentation triviale 1.

On fait opérer diagonalement G sur le produit $X \times X$ en posant $g(x, y) = (gx, gy)$ pour tout $g \in G$ et tous $x, y \in X$.

2. Montrer que le caractère de la représentation de permutation sur $X \times X$ est égal à χ^2.
3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes
   (i) l'action de G sur X est doublement transitive ;
   (ii) on a l'égalité $\langle \chi^2, 1\rangle = 2$;
   (iii) la représentation θ est irréductible.