
Feuille d'exercices 12

Exercice 1 Soit G un groupe fini, soit H un sous-groupe de G et soit π une représentation de G de caractère χ . Montrer que la restriction de π à H a pour caractère la restriction $\chi|_H$. Si π est irréductible, est-ce que $\chi|_H$ est un caractère irréductible ?

Exercice 2 Soit G un groupe fini, soit H un sous-groupe de G et soit (π, V) une représentation de H . On pose

$$W := \text{Ind}_H^G(\pi) := \{f : G \rightarrow V \mid \forall x \in G \forall h \in H \quad f(hx) = \pi(h)f(x)\},$$

avec action de G donnée par $g(f) = f(\cdot g)$. Montrer que $\text{Ind}_H^G(\pi)$ est une représentation de G . Si π est irréductible, est-ce que $\text{Ind}_H^G(\pi)$ est une représentation irréductible de G ?

Exercice 3 Soit G un groupe fini ; notons triv la représentation triviale du sous-groupe $\{e_G\}$ de G . Déterminer la représentation $\text{Ind}_{\{e_G\}}^G(\text{triv})$.

Exercice 4 Soit G un groupe fini et soit H un sous-groupe de G . On va définir une application entre espaces de fonctions centrales

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(H) & \longrightarrow & \mathcal{C}(G) \\ f & \longmapsto & f^G. \end{array}$$

D'abord on définit $f^0 : G \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$f^0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ensuite on pose $f^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} f^0(xgx^{-1})$.

1. Montrer que $f^G \in \mathcal{C}(G)$.
2. Supposons que f est un caractère irréductible. Est-ce que f^G est irréductible ?
3. Soit (π, V) une représentation de H et soit χ son caractère. Montrer que χ^G est le caractère de $\text{Ind}_H^G(\pi)$.

Exercice 5 (Réciprocité de Frobenius, point de vue des représentations) Soit G un groupe fini, soit H un sous-groupe de G , soit π une représentation de H et soit ρ une représentation de G . Montrer :

$$\mathrm{Hom}_G(\rho, \mathrm{Ind}_H^G(\pi)) = \mathrm{Hom}_H(\rho|_H, \pi).$$

Déduire que, si ρ et π sont irréductibles, la multiplicité de ρ dans $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est égale à la multiplicité de π dans $\rho|_H$.

Exercice 6 (Réciprocité de Frobenius, point de vue des caractères) Soient G un groupe fini, soit H un sous-groupe de G , soit ϕ une fonction centrale sur G et soit ψ une fonction centrale sur H . Montrer

$$\langle \phi, \psi^G \rangle = \langle \phi|_H, \psi \rangle.$$

Exercice 7 (Théorème de Frobenius) Soit $n \geq 1$ un entier et soit G un groupe fini. Soit X un ensemble à n éléments muni d'une action transitive de G , soit $x_0 \in X$ et soit H le stabilisateur de x_0 . On suppose que tout élément de G autre que l'identité fixe au plus un élément de X .

Soit G_1 l'ensemble des éléments de G qui agissent sur X sans point fixe ; on pose $G_0 := G_1 \cup \{1\}$.

1. Déterminer le cardinal de G_0 .
2. Soit χ_σ le caractère de la \mathbf{C} -représentation de permutation donnée par l'action de G sur X et soit χ_1 le caractère de la représentation triviale ; on pose $\chi = \chi_\sigma - \chi_1$. Montrer que χ est un caractère.
3. Soient ψ un caractère irréductible de H et ψ_G le caractère de l'induite de H à G . On pose $\phi = \psi_G - \psi(1)\chi$. Montrer que ϕ est un caractère irréductible de G . En déduire que G_0 est un sous-groupe normal de G .

Exercice 8 (Critère de Mackey) Soit G un groupe fini et soit \mathbf{K} un corps algébriquement clos de caractéristique première à $|G|$. Soient H et K des sous-groupes de G et soit (ρ, W) une représentation de H sur \mathbf{K} . On pose $V := \mathrm{Ind}_H^G W$.

Soit \mathcal{S} un système de représentants de $K \backslash G / H$ contenant 1. Pour $s \in \mathcal{S}$, on pose $H_s = sHs^{-1} \cap K$ et on note W_s la représentation de H_s correspondant au morphisme

$$\rho^s : H_s \rightarrow \mathrm{GL}(W) \\ x \mapsto \rho(s^{-1}xs) .$$

1. Montrer que V est isomorphe à $\bigoplus_{\mathcal{S}} \mathrm{Ind}_{H_s}^K W_s$ en tant que K -représentation.
2. Montrer que V est irréductible si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :
 - (i) W est irréductible ;

- (ii) pour tout $s \in \mathcal{S} \setminus \{1\}$, $\text{Hom}(W_s, W|_{H_s}) = 0$ (on dit alors que W_s , et $W|_{H_s}$ ne s'entrelacent pas).

Exercice 9 (Représentations complexes de \mathfrak{S}_n) Soit $n \geq 1$ un entier et soit λ une partition de n , c'est-à-dire une suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ d'entiers naturels vérifiant $n = \sum_k \lambda_k$ avec $\lambda_k \geq \lambda_{k+1}$ pour tout k . À cette partition λ , on associe un *tableau de Young* T_λ , qui est un tableau de n cases alignées à gauche dans lequel la i -ème ligne a λ_i colonnes.

Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n s'identifie au groupe de permutations des cases de T_λ . On définit alors le sous-groupe P_λ (resp. Q_λ) comme étant respectivement le stabilisateur des lignes (resp. des colonnes) de T_λ . On appelle *projecteurs de Young* les éléments

$$a_\lambda = \frac{1}{|P_\lambda|} \sum_{P_\lambda} g, \quad b_\lambda = \frac{1}{|Q_\lambda|} \sum_{Q_\lambda} \varepsilon(g) g,$$

où $\varepsilon(g)$ désigne la signature de la permutation g . On pose $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda$.

1. Supposons $g \in \mathfrak{S}_n \setminus P_\lambda Q_\lambda$. Montrer qu'il existe une transposition $t \in P_\lambda$ vérifiant $g^{-1}tg \in Q_\lambda$.
2. En déduire l'existence d'une application linéaire $l_\lambda : \mathbf{C}[\mathfrak{S}_n] \rightarrow \mathbf{C}$ telle que l'on ait $a_\lambda g b_\lambda = l_\lambda(g) c_\lambda$ pour tout $g \in \mathbf{C}[\mathfrak{S}_n]$.
3. Soit μ une partition de n . On introduit l'ordre lexicographique sur les partitions de n : on a $\lambda > \mu$ s'il existe $j \geq 1$ tel que $\lambda_j > \mu_j$ et $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i < j$. Supposons $\lambda > \mu$. Montrer que l'on a $a_\lambda \mathbf{C}[\mathfrak{S}_n] b_\mu = 0$.
4. Soit A une algèbre. Un élément $e \in A$ est dit *idempotent* s'il vérifie $e^2 = e$. Montrer que pour tout A -module à gauche M , on a $\text{Hom}_A(Ae, M) \simeq eM$. Montrer que c_λ est proportionnel à un idempotent de $\mathbf{C}[\mathfrak{S}_n]$.
5. Soit V_λ la représentation de \mathfrak{S}_n donnée par multiplication à gauche sur l'espace $\mathbf{C}[\mathfrak{S}_n] c_\lambda$. Montrer que l'application $\lambda \mapsto V_\lambda$ induit une bijection entre l'ensemble des partitions de n et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de \mathfrak{S}_n sur \mathbf{C} .

Exercice 10 On garde les notations de l'exercice précédent. Soit U_λ la représentation $\text{Ind}_{P_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{C}$.

1. Montrer que la représentation obtenue par multiplication à gauche sur $\mathbf{C}[\mathfrak{S}_n] a_\lambda$ est isomorphe à U_λ .
2. Montrer la décomposition $U_\lambda = \bigoplus_{\mu \geq \lambda} K_{\mu\lambda} V_\mu$, où les $K_{\mu\lambda}$ sont des entiers naturels avec $K_{\lambda\lambda} = 1$.

Les entiers $K_{\mu\lambda}$ sont appelés *nombres de Kostka*.

On définit les ensembles suivants, qui correspondent à ajouter ou enlever une case sur le tableau de Young T_λ :

$$A(\lambda) = \{\nu \text{ partition de } n+1 \mid \exists j, \forall i, \nu_i = \lambda_i + \delta_{ij}\},$$

$$R(\lambda) = \{\nu \text{ partition de } n-1 \mid \exists j, \forall i, \nu_i = \lambda_i - \delta_{ij}\}.$$

3. Montrer que V_λ est isomorphe à $\bigoplus_{\nu \in R(\lambda)} V_\nu$ en tant que \mathfrak{S}_{n-1} -représentation.
4. Montrer que $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} V_\nu \simeq \bigoplus_{\lambda \in A(\nu)} V_\lambda$ est un isomorphisme de \mathfrak{S}_n -représentations.