
Feuille d'exercices 1

Généralités

Exercice 1 Soit E un ensemble muni d'une loi de composition, associative, avec élément unité e , et telle que tout élément de E possède un inverse à gauche. Montrer qu'alors tout élément de E possède un inverse à droite qui coïncide avec son inverse à gauche. En déduire que E est un groupe.

Exercice 2 Soit G un groupe tel que $g^2 = e$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 3 Soient G un groupe et H un sous-ensemble fini non vide de G stable pour la loi de composition du groupe G . Montrer que H est un sous-groupe de G . Trouver un exemple d'un groupe G et d'un sous-ensemble non vide de G stable pour la loi de composition du groupe G qui ne soit pas un sous-groupe de G .

Exercice 4 Montrer que si G est un groupe de cardinal inférieur ou égal à 5, alors G est commutatif. Qu'en est-il pour un groupe de cardinal 6 ?

Exercice 5 Soit G un groupe fini.

1. Montrer que des éléments conjugués dans G sont de même ordre.
2. Deux éléments de même ordre dans G sont-ils toujours conjugués?
3. Trouver tous les groupes abéliens finis G pour lesquels (2) a une réponse positive. Un exemple non abélien?

Exercice 6 Prouver que les sous-groupes de \mathbb{Z} sont les $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Prouver que les sous-groupes non denses de \mathbb{R} sont les $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 Montrer qu'il n'existe pas de morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{Q}, +)$ dans (\mathbb{Q}^*, \times) .

Exercice 8 Soit G un groupe tel que le quotient par son centre est monogène. Prouver que G est abélien.

Exercice 9 Soit G un groupe de cardinal p premier.

1. Vérifier que G est cyclique.
2. Déterminer l'ensemble des sous-groupes du groupe $\mathbb{F}^2 := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Notamment montrer qu'il y en a exactement $p + 3$.
3. En déduire qu'il existe dans \mathbb{F}^2 des groupes qui ne sont pas de la forme $G_1 \times H_1$ avec G_1 un sous-groupe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et H_1 un sous-groupe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 10 Soit G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice 2. Montrer que H est distingué dans G .

Exercice 11 Soient G un groupe abélien et $H \subset K \subset G$ deux sous-groupes. Prouver que G/K est isomorphe au quotient du groupe G/H par le groupe K/H .

Exercice 12 Soit G un groupe de type fini

1. Un sous-groupe H de G est-il nécessairement de type fini ?
2. Même question en supposant de plus que le cardinal de G/H est fini.

Exercice 13 1. On note H_8 le groupe de quaternions défini par

$$H_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}, \quad \text{avec } i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ et } ijk = -1.$$

Vérifier que H_8 n'est pas commutatif mais que tous ses sous-groupes sont distingués.

2. On dit qu'un groupe G est d'exposant e si e est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que pour tout $g \in G$, on a $g^n = 1$. Pour quels exposants e un groupe d'exposant e est-il nécessairement commutatif ?

Exercice 14 Soit G un groupe fini.

1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit un sous-groupe de \mathcal{S}_n .
2. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit un sous-groupe de \mathcal{A}_n .
3. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit un sous-groupe de $\text{GL}_n(k)$, pour tout corps k .
4. Si G est d'ordre n , montrer que G est un sous-groupe de $\text{O}_{n-1}(\mathbb{R})$.