Ecole Normale Supérieure Paris Année 2014-2015
Algèbre 1

Feuille d'exercices 1

Généralités

Exercice 1 Soit E un ensemble muni d'une loi de composition, associative, avec élément unité e, et telle que tout élément de E possède un inverse à gauche. Montrer qu'alors tout élément de E possède un inverse à droite qui coïncide avec son inverse à gauche. En déduire que E est un groupe.

Exercice 2 Soit G un groupe tel que $g^2 = e$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 3 Soient G un groupe et H un sous-ensemble fini non vide de G stable pour la loi de composition du groupe G. Montrer que H est un sous-groupe de G. Trouver un exemple d'un groupe G et d'un sous-ensemble non vide de G stable pour la loi de composition du groupe G qui ne soit pas un sous-groupe de G.

Exercice 4 Soient G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice 2. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 5 Soit G un groupe fini.

1. Montrer que des éléments conjugués dans G sont de même ordre.
2. Deux éléments de même ordre dans G sont-ils toujours conjugués ?
3. Trouver tous les groupes abéliens finis G pour lesquels (2) a une réponse positive. Un exemple non abélien ?

Exercice 6 Soient $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes et x un élément de G_1 d'ordre fini. Montrer que l'ordre de $f(x)$ divise l'ordre de x.

Exercice 7 Montrer qu'il n'existe pas de morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$.

Exercice 8 Soit G un groupe tel que le quotient par son centre est monogène. Prouver que G est abélien.

Exercice 9 Soit G un groupe. Vrai ou faux ?

1. Si tout sous-groupe H de G est distingué dans G, alors G est abélien.
2. Si $H \triangleleft G$ et $K \triangleleft H$, alors $K \triangleleft G$.
3. Soient $x, y \in G$ d'ordre fini. Alors xy est nécessairement d'ordre fini.
4. Si G a un nombre fini de sous-groupes, alors G est fini.
5. Si H et K sont des sous-groupes de G, alors $\langle H \cup K \rangle = HK$.

Exercice 10 Soit S un sous-ensemble non vide d'un groupe fini G. Soient $N(S) := \{g \in G : gSg^{-1} = S\}$ et $C(S) := \{g \in G : \forall s \in S, gsg^{-1} = s\}$ le normalisateur et le centralisateur de S dans G. Montrer que :

1. $N(S) < G$ et $C(S) \triangleleft N(S)$.
2. $N(S) = G$ si et seulement si $S = \bigcup_{g \in G}(gSg^{-1})$.
3. Si $H \triangleleft G$, alorsi $C(H) \triangleleft G$.
4. Si $H < G$, alors $N(H)$ est le plus grand sous-groupe de G contenant H et dans lequel H est distingué.

Exercice 11 Soient G un groupe abélien et $H \subset K \subset G$ deux sous-groupes. Prouver que G/K est isomorphe au quotient du groupe G/H par le groupe K/H.

Exercice 12 Soit G un groupe de type fini

1. Un sous-groupe H de G est-il nécessairement de type fini ?
2. Même question en supposant de plus que le cardinal de G/H est fini.

Exercice 13 On dit qu'un groupe G est d'exposant e si e est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que pour tout $g \in G$, on a $g^n = 1$. Pour quels exposants e un groupe d'exposant e est-il nécessairement commutatif ?

Exercice 14 Prouver que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Prouver que les sous-groupes non denses de $\mathbb{R}$ sont les $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 Soit G un groupe fini.

1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$.
2. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit un sous-groupe de $\mathscr{A}_n$.
3. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$, pour tout corps k.

Exercice 16 Déterminer les classes de conjugaison dans $\mathscr{S}_n$. Et dans $\mathscr{A}_n$?

Exercice 17 Montrer que $\mathscr{S}_{n+2}$ a deux sous-groupes non-conjugués isomorphes à $\mathscr{S}_n$.

Exercice 18 Montrer que tout sous-groupe d'indice n dans $\mathscr{S}_n$ est isomorphe à $\mathscr{S}_{n-1}$.