
Feuille d'exercices 2

Actions de groupes

Exercice 1 (Lemme de Cauchy) Soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant le cardinal de G . En utilisant une action convenable sur l'ensemble

$$X = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = 1\}$$

et, sans utiliser les théorèmes de Sylow, prouver que G admet un élément d'ordre p .

Exercice 2 On dit qu'un groupe G opère transitivement sur l'ensemble X si pour tout couple $(x, y) \in X^2$, il existe $g \in G$ tel que $gx = y$.

Soit G un groupe d'ordre n opérant transitivement sur un ensemble X de cardinal l .

a) Montrer que l divise n .

b) Montrer que les stabilisateurs des éléments de X sont conjugués et que le cardinal de leur réunion est majoré par $n - l + 1$.

c) Si $l \geq 2$ montrer qu'il existe au moins $l - 1$ éléments de G qui n'ont pas de point fixe.

Exercice 3 (Lemme d'Ore) Soient G un groupe fini, p le plus petit facteur premier de $|G|$ et H un sous-groupe de G d'indice p . Montrer que H est distingué dans G .

Exercice 4 (Formule de Burnside) Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble X . Le fixateur d'un élément $g \in G$ est par définition l'ensemble $\text{Fix}(g) := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$. Montrer que le nombre d'orbites pour l'action de G sur X est donné par la formule

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|.$$

On pourra calculer de plusieurs façons le cardinal de l'ensemble

$$C = \{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}.$$

Théorèmes de Sylow

Exercice 5 Montrer qu'un groupe non banal (c'est-à-dire un groupe qui n'est pas d'ordre un nombre premier) d'ordre $1 < n < 60$ n'est pas simple

Exercice 6 On suppose qu'il existe un groupe simple G d'ordre 180.

1. Montrer que G contient 36 5-Sylow.
2. Montrer que G contient 10 3-Sylow, puis que deux 3-Sylow distincts ne peuvent pas contenir un même élément $g \neq e_G$. (Indication : on pourra considérer les ordres possibles pour le centralisateur de g ; on observera qu'un groupe d'ordre 18 admet un unique 3-Sylow.)
3. Conclure.

Exercice 7 On suppose qu'il existe un groupe simple G d'ordre 252.

1. Trouver le nombre d'éléments d'ordre 7 de G .
2. Montrer que deux 3-Sylow distincts de G ne peuvent pas contenir un même élément $g \neq e_G$. (Indication : on pourra considérer les ordres possibles pour le centralisateur de g ; on observera qu'un groupe d'ordre 18 admet un unique 3-Sylow.)
3. Estimer le nombre de 3-Sylow de G et conclure.

Exercice 8 Montrer qu'un groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à \mathcal{A}_5 .

Exercice 9 Soit G un groupe, S un 2-sous-groupe de Sylow. On suppose S cyclique et $|G| > 2$. Montrer que G n'est pas simple. En particulier, si G est simple et G est pair alors $4 \mid |G|$. (Indication : on peut faire opérer G sur G par translation et considérer la signature ϵ de la permutation induite sur G par le générateur s de S . On voit que $\epsilon(s) = -1$ d'où un homomorphisme non-trivial dans $\{-1, 1\}$.)

Montrer qu'un groupe d'ordre 90 n'est pas simple. Reprendre l'exercice 5 pour $n \leq 100$, $n \neq 60$.

Exercice 10 1. Montrer qu'un groupe non banal d'ordre $60 < n < 168$ n'est jamais simple.

2. Montrer que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ est d'ordre 168.
3. Montrer que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ est simple. Indication : on pourra raisonner sur ses 7-sous-groupes de Sylow.
4. Soit G simple d'ordre 168. Montrer que G est isomorphe à $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$.