Ecole Normale Supérieure Paris Année 2014-2015
Algèbre 1

Feuille d'exercices 2

Opérations de groupes

Exercice 1 Soit p est un nombre premier. Montrer qu'un groupe de cardinal p^2 est commutatif. Combien d'élements d'ordre p y a-t-il dans un groupe de cardinal p ? Et dans un groupe de cardinal p^2 ?

Exercice 2 Soit G un groupe de cardinal n qui opère non trivialement sur un ensemble X de cardinal m. Montrer que, si n ne divise pas $m!$, alors l'action de G sur X n'est pas fidèle et G n'est pas un groupe simple.

Exercice 3 Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini E.
a) On suppose que E n'a pas de point fixe, que l'ordre de G est 15, et que le cardinal de E est 17. Déterminer le nombre de G-orbites, et le cardinal de chacune d'elles.
b) Montrer que si G est d'ordre 33, et si E possède 19 éléments, il existe des points fixes de E sous l'action de G.

Exercice 4 (Lemme de Cauchy) Soient G un groupe fini et p un nombre premier divisant le cardinal de G. En utilisant une action convenable sur l'ensemble

$$X = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = 1\}$$

et, sans utiliser les théorèmes de Sylow, prouver que G admet un élément d'ordre p.

Exercice 5 On dit qu'un groupe G opère transitivement sur l'ensemble X si pour tout couple $(x, y) \in X^2$, il existe $g \in G$ tel que $gx = y$.
Soit G un groupe d'ordre n opérant transitivement sur un ensemble X de cardinal l.
a) Montrer que l divise n.
b) Montrer que les stabilisateurs des éléments de X sont conjugués et que le cardinal de leur réunion est majoré par $n - l + 1$.
c) Si $l \geq 2$ montrer qu'il existe au moins $l - 1$ éléments de G qui n'ont pas de point fixe.

Exercice 6 (Lemme d'Ore) Soient G un groupe fini, p le plus petit facteur premier de $|G|$ et H un sous-groupe de G d'indice p. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 7 (**Formule de Burnside**) Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble X. Le fixateur d'un élément $g \in G$ est par définition l'ensemble $\mathrm{Fix}(g) := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$. Montrer que le nombre d'orbites pour l'action de G sur X est donné par la formule

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

(On pourra calculer de plusieurs façons le cardinal de l'ensemble

$$C = \{(g, x) \in G \times X \ |g \cdot x = x\}.)$$

Théorèmes de Sylow

Exercice 8 Montrer qu'un groupe d'ordre $1 < n < 60$ avec n non premier n'est pas simple

Exercice 9 On suppose qu'il existe un groupe simple G d'ordre 180.

1. Montrer que G contient 36 5-Sylow.
2. Montrer que G contient 10 3-Sylow, puis que deux 3-Sylow distincts ne peuvent pas contenir un même élément $g \neq e_G$. (Indication : on pourra considérer les ordres possibles pour le centralisateur de g; on observera qu'un groupe d'ordre 18 admet un unique 3-Sylow.)
3. Conclure.

Exercice 10 On suppose qu'il existe un groupe simple G d'ordre 252.

1. Trouver le nombre d'éléments d'ordre 7 de G.
2. Montrer que deux 3-Sylow distincts de G ne peuvent pas contenir un même élément $g \neq e_G$. (Indication : on pourra considérer les ordres possibles pour le centralisateur de g; on observera qu'un groupe d'ordre 18 admet un unique 3-Sylow.)
3. Estimer le nombre de 3-Sylow de G et conclure.

Exercice 11 Montrer qu'un groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathscr{A}_5$.

Exercice 12 Soient G un groupe, S un 2-sous-groupe de Sylow. On suppose S cyclique et $|G| > 2$. Montrer que G n'est pas simple. En particulier, si G et simple et G est pair alors $4||G|$. (Indication : on peut faire opérer G sur G par translation et considérer la signature ϵ de la permutation induite sur G par le générateur s de S. On voit que $\epsilon(s) = -1$ d'où un homomorphisme non-trivial dans $\{-1, 1\}$.)
Montrer qu'un groupe d'ordre 90 n'est pas simple. Reprendre l'exercice 5 pour $n \leq 100$, $n \neq 60$.

Exercice 13

1. Montrer qu'un groupe d'ordre $60 < n < 168$ avec n non premier n'est jamais simple.
2. Montrer que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ est d'ordre 168.
3. Montrer que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ est simple. Indication : on pourra raisonner sur ses 7-sous-groupes de Sylow.
4. Soit G simple d'ordre 168. Montrer que G est isomorphe à $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$.