**Ecole Normale Supérieure Paris** Année 2013-2014
Algèbre 1

# Feuille d'exercices 3

**Exercice 1** Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/90\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

**Exercice 2** Soit $G$ un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe dans $G$ un élément d'ordre l'*exposant de* $G$ (c'est-à-dire, d'ordre le ppcm des ordres des éléments de $G$).

**Exercice 3** Décomposer le groupe $G = (\mathbb{Z}/187\mathbb{Z})^\times$ sous la forme donnée par le théorème de structure des groupes abéliens de type fini.

**Exercice 4 (Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)**

a) Soit $G$ un groupe monogène. Montrer que le groupe des automorphismes de $G$ est en bijection avec l'ensemble des générateurs de $G$.

b) Soient $p$ un nombre premier impair et $\alpha \geq 1$. Quel est l'ordre de $1+p$ dans $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$? En déduire $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/p^{\alpha-1}(p-1)\mathbb{Z}$.

c) Expliciter $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^\times$ pour $\alpha \geq 1$.

d) En déduire $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, pour $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 5** Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

**Exercice 6** Soit $n \geq 1$, constuire dans $\mathbb{R}$ un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.

**Exercice 7** Soit $G = \mathbb{Z}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer que tout système libre maximal est de cardinal $n$. Donner un exemple où un tel système n'est pas une base.

**Exercice 8** Soit $e_1 = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ un vecteur tel que le pgcd de ses coordonnées vaut 1. Montrer que l'on peut compléter $e_1$ en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{Z}^n$.

**Exercice 9** Soit $G$ un groupe abélien de type fini, et soit $f : G \to G$ un morphisme surjectif. Montrer que $f$ est un isomorphisme. Ceci est-il nécessairement vrai si l'on remplace surjectif par injectif ?

**Exercice 10** Soit $n \geq 1$. On note $\mathrm{Int}(\mathscr{S}_n)$ le sous-groupe des automorphismes intérieurs de $\mathrm{Aut}(\mathscr{S}_n)$.

1. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{S}_n)$ tel que $\phi$ transforme toute transposition en une transposition. Montrer que $\phi$ est intérieur.

2. Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Déterminer le cardinal du commutant $Z(\sigma) := \{s \in \mathscr{S}_n \mid s\sigma s^{-1} = \sigma \}$ de $\sigma$.

3. En déduire que, si $n \neq 6$, alors $\mathrm{Int}(\mathscr{S}_n) = \mathrm{Aut}(\mathscr{S}_n)$.

4. Soit $n \geq 5$ tel que $\mathrm{Int}(\mathscr{S}_n) = \mathrm{Aut}(\mathscr{S}_n)$. Montrer que tous les sous-groupes d'indice $n$ de $S_n$ sont conjugués.

5. En utilisant les 5-Sylow de $\mathscr{S}_5$, montrer qu'il existe un sous-groupe $H$ d'indice 6 de $S_6$ opérant transitivement sur $\{1, \ldots, 6\}$.

6. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathscr{S}_6) \neq \mathrm{Int}(\mathscr{S}_6)$.

**Simplicité de $\mathscr{A}_5$**

*Le plus petit nombre de permutations que puisse avoir un groupe indécomposable quand ce nombre n'est pas premier est* 5.4.3.

Évariste Galois, dans sa dernière lettre

**Exercice 11 Simplicité de $\mathscr{A}_5$.** Supposons qu'il existe $H$ un sous-groupe distingué non-trivial de $\mathscr{A}_n$.

1. Montrer que les éléments d'ordre 2 sont conjugués dans $\mathscr{A}_5$.

2. Montrer que si $H$ contient un 5-cycle, il les contient tous.

3. En déduire que $\mathscr{A}_5$ est simple.

**Exercice 12 Simplicité de $\mathscr{A}_n$.**

1. Montrer que $\mathscr{A}_n$ contient tous les 3-cycles.

2. Montrer que $\mathscr{A}_n$ est engendré par les 3-cycles $(12k)$ pour $k > 2$.

Supposons qu'il existe $H \lhd \mathscr{A}_n$ un sous-groupe distingué non-trivial.

3. Montrer que, si $H$ contient un 3-cycle, il les contient tous.

4. Montrer que $H$ contient un 3-cycle et conclure.